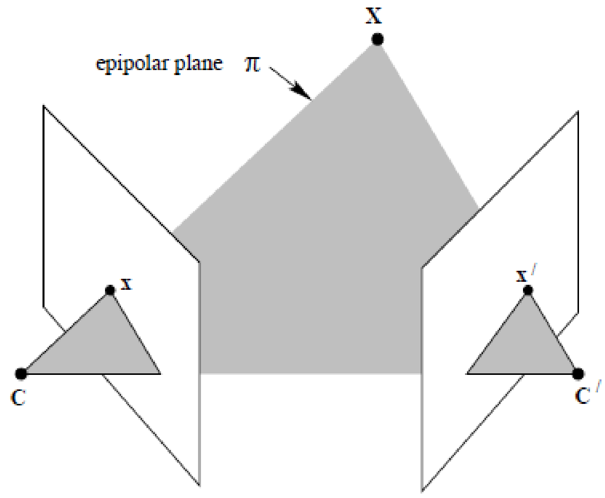
Epipolárna geometria

Zatiaľ sme sa venovali vlastnostiam jednej kamery. Pozrime sa teraz na prípad, ak máme danú scénu zosnímanú dvoma kamerami. Daný bod scény $\mathbf{X}$



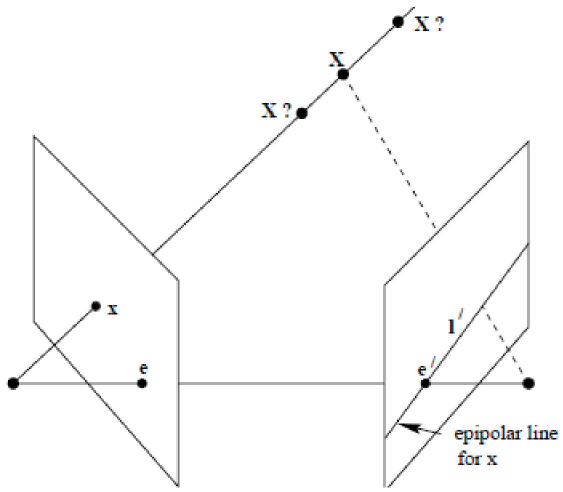
Obr. 1: R. Hartley, A. Zisserman: Multiple View Geometry in Computer Vision

sa jednotlivými kamerami zobrazí na body $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}'$ v priemetňach jednotlivých kamier. Ak máme dva obrazy danej scény, môže nás zaujimať:

- Ako bod $\mathbf{x}$ v prvom obraze obmedzuje polohu bodu $\mathbf{x}'$ v druhom obraze,
- či a ako je možné nájsť matice kamier P a P' z množiny zodpovedajúcich si bodov $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$.
- či, ako a do akej miery je zo znalosti páru $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ a matíc kamier P a P' možné určiť polohu $\mathbf{X}$ ich vzoru.

Skôr než niektoré otázky zodpovieme, zaveďme si niekoľko pojmov (viď obr. 1 a obr. 2).

Stredy kamier $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ bod $\mathbf{X}$ a jeho obrazy $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}'$ ležia v jednej rovine π túto rovinu nazývame epipolárna rovina. Pre pevné kamery sa epipolárne roviny určené stredmi kamier a bodom $\mathbf{X}$, resp. ľubovoľným jeho obrazom pretínajú v jednej priamke, ktorú nazveme bázická priamka. Táto priamka spája stredy kamier a pretína priemetne kamier v bodoch $\mathbf{e}$ a $\mathbf{e}'$ ktoré nazývame epipóly. Stred $\mathbf{C}$ a bod $\mathbf{x}$ v priemetni prvej kamery určuje lúč. Obraz tohto lúča druhou kamerou je priamka v priemetni druhej kamery, ktorú nazývame epipolárna priamka (je zrejmé, že sa jedná o symetrickú situáciu).



Obr. 2: R. Hartley, A. Zisserman: Multiple View Geometry in Computer Vision

Všetky epipolárne priamky sa pretínajú v príslušnom epipóle. Tiež je zrejmé, že epipolárna priamka je prienikom priemetne s epipolárnou rovinou.

Fundamentálna matica páru kamier

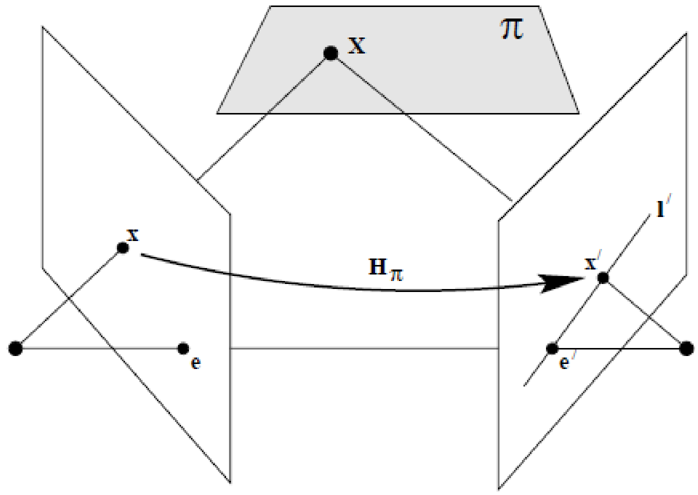
V predchádzajúcej časti sme videli, že bodu $\mathbf{x}$, ktorý nie je epipólom, v priemetni prvej kamery zodpovedá epipolárna priamka $\mathbf{l}'$ v priemetni druhej kamery. Vďaka projektívnej geometrii toto priradenie $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{l}'$ definuje projektívne zobrazenie. Maticu tohto zobrazenia nazývame fundamentálna matica.

Poznámka: Vo vyjadrení fundamenálnej matice bude vystupovať vektorový súčin. Pre pevný vektor $\mathbf{v}$ je zobrazenie $[\mathbf{v}]_\times$ definované predpisom $[\mathbf{v}]_\times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ lineárne a jeho matica pre $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je

$$[\mathbf{v}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Geometrické odvodenie fundamentálnej matice

Nech π je rovina v priestore, ktorá neobsahuje C ani C'. Lúč cez $\mathbf{x}$ pretne rovinu π v bode $\mathbf{X}$. Obraz tohto bodu $\mathbf{X}$ druhou kamerou je $\mathbf{x}'$. Táto konštrukcia definuje planárnu homografiu H_π, čiže $\mathbf{x}' = H_\pi \mathbf{x}$. Bod $\mathbf{x}'$ leží na



Obr. 3: R. Hartley, A. Zisserman: Multiple View Geometry in Computer Vision

epipolárnej priamke $\mathbf{l}'$, ktorá samozrejme obsahuje epipól $\mathbf{e}'$, preto

$$\mathbf{l}' = \mathbf{l}' \times \mathbf{x}' = [\mathbf{e}']_{\times}\mathbf{x}' = [\mathbf{e}']_{\times} H_{\pi}\mathbf{x} = F\mathbf{x}.$$

Matica $F == [\mathbf{e}']_{\times} H_{\pi}$. V tomto vyjadrení sa zdá, že fundamentálna matica závisí aj od voľby roviny π. Pri algebraickom odvodení sa ukáže, že v skutočnosti F od voľby π nezávisí.

Algebraické odvodenie fundamentálnej matice

Nech P a P' sú matice kamier. Pre daný bod $\mathbf{x}$ v priemetni prvej kamery má lúč cez $\mathbf{x}$ vyjadrenie

$$X(\lambda) = P^{+}\mathbf{x} + \lambda\mathbf{C}.$$

Pre $\lambda = 0$ je obraz príslušného bodu druhou kamerou

$$P'X(0) = P'P^{+}\mathbf{x}.$$

Epipól $\mathbf{e}'$ druhej kamery je obrazom stredu $\mathbf{C}$ prvej kamery $\mathbf{e}' = P'\mathbf{C}$, preto

$$\mathbf{l}' = (P'\mathbf{C}) \times (P'P^{+}\mathbf{x}) = [\mathbf{e}']_{\times}(P'P^{+})\mathbf{x}$$

a fundamentálna matica je $F = [\mathbf{e}']_{\times}(P'P^{+})$. Z toho vidno že F naozaj nezávisí od voľby π v geometrickom odvodení.

Pre pár zodpovedajúcich si bodov $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ a fundamentálnu maticu F platí

$$\mathbf{x}'^T F\mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{l}' = 0.$$

Tento vzťah umožňuje získať F zo znalosti dostatočného počtu párov bodov $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$. Alternatívne teda môžeme fundamentálnu maticu definovať nasledovne

Definícia: Predpokladajme, že máme dva obrazy získané z kamier s rôznymi stredmi. Fundamentálna matica páru kamier je matica F rozmeru 3×3 hodnosti 2, ktorá spĺňa vzťah

$$\mathbf{x}'^T F\mathbf{x} = 0$$

pre každú dvojicu zodpovedajúcich si bodov $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$

Vlastnosti fundamentálnej matice

1. Ak F je fundamentálna matica páru (P, P'), tak F^T je fundamentálna matica páru (P', P).
2. Pre $\mathbf{x}$ z priemetne prvej kamery P je epipolárna priamka v priemetni druhej kamery P' daná $F\mathbf{x}$. Naopak $F^T\mathbf{x}'$ je epipolárna priamka v priemetni prvej kamery P zodpovedajúca bodu $\mathbf{x}'$ v priemetni kamery P'.
3. Pre každý bod $\mathbf{x} \neq \mathbf{e}$ priamka $\mathbf{l}' = F\mathbf{x}$ obsahuje epipól $\mathbf{e}'$.
4. F má sedem stupňov voľnosti.
5. F určuje projektívne zobrazenie bodov na priamky.

Získanie matice kamier z fundamentálnej matice

Ak (P, P') je pár kamier a H je 4×4 matica reprezentujúca projektívnu transformáciu priestoru $\mathbb{R}^3$, tak (P, P') a $(PH, P'H)$ majú rovnakú fundamentálnu maticu.

- Fundamentálna matica určuje dvojicu matíc kamier až na projektívnu transformáciu.
- Fundamentálna matica zodpovedajúca dvojici $P = [I|\mathbf{0}]$ a $P' = [M, \mathbf{m}]$ je $[\mathbf{m}]_\times M$

- Nech (P, P') a $(\widetilde{P}, \widetilde{P}')$ sú páry kamier so spoločnou fundamentálnou maticou. Potom existuje projektívna transformácia H taká, že $\widetilde{P} = PH$ a $\widetilde{P}' = P'H$

Nech F je fundamentálna matica a S je antisymetrická matica. Definujme $P = [I|\mathbf{0}]$ a $P' = [SF, \mathbf{e}']$, kde $\mathbf{e}'^T F = 0$ je epipól a P' má hodnosť 3. Potom F je fundamentálna matica páru (P, P'). Špeciálne môžeme použiť $S = [\mathbf{e}']_\times$.

Esenciálna matica

Esenciálna matica je špeciálny prípad fundamentálnej matice pre tzv. normalizované kamery, t.j. kamery, v maticach ktorých odstránime kalibračnú maticu. Symbolicky, ak $P = K[R|\mathbf{t}]$ a $\mathbf{x} = P\mathbf{X}$ a poznáme kalibračnú maticu K, zvoľme $\hat{\mathbf{x}} = K^{-1}\mathbf{x}$. Potom $\hat{\mathbf{x}} = [R|\mathbf{t}]\mathbf{X}$. Tejto transformácii hovoríme normalizácia súradníc. Kameru s maticou $K^{-1}P = [R|\mathbf{t}]$ nazývame normalizovaná kamera.

Pre pár normalizovaných kamier $P = [I, \mathbf{0}]$ a $P' = [R, \mathbf{t}]$ ich fundamentálnu maticu nazývame esenciálna matica a je definovaná ako

$$E = [\mathbf{t}]_\times R = R[R^T \mathbf{t}]_\times.$$

Podobne ako v prípade fundamentálnej matice je definujúca rovnica esenciálnej matice

$$\hat{\mathbf{x}}'^T E \hat{\mathbf{x}} = 0.$$

Vzťah medzi fundamentálnou a esenciálnou maticou je

$$F = K'^T E K$$

kde K a K' sú kalibračné matice príslušných kamier.

Matice kamier z esenciálnej matice je možné získať nasledovným spôsobom.

Zo singulárneho rozkladu máme $E = U\mathrm{diag}(1, 1, 0)^T$. Nech $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Potom $E = SR$, kde S je antisymetrická matica a R je ortogonálna, pričom

$$S = UZU^T \qquad R = UWV^T \text{ alebo } UW^TV^T.$$

To dáva štyri možnosti pre voľbu kamery P' ku kamere $P = [I|\mathbf{0}]$,

$$
\begin{aligned}
P' &= [UWV^T| \pm \mathbf{u}_3], \text{ alebo} \\
P' &= [UW^TV^T| \pm \mathbf{u}_3],
\end{aligned}
$$

kde $\mathbf{u}_3$ je posledný stĺpec matice U.