

Matematický model konečnej projektívnej kamery

Rozklad matice kamery

Ak máme danú maticu kamery $P = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4]$, stred kamery vieme nájsť ako riešenie homogénneho systému lineárnych rovníc s maticou P . V homogénnych súradniciach súradnice stredu kamery $\mathbf{C} = (X, Y, Z, T)$ je možné výhodne spočítať ako

$$X = \det([\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4])$$

$$Y = \det([\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4])$$

$$Z = \det([\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4])$$

$$T = \det([\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3])$$

Orientáciu a vnútorné parametre kamery s maticou $P = [M] - M\mathbf{C}$ nájdeme použitím RQ-rozkladu matice $M = KR$, kde K je horná trojuholníková (pre ktorú kvôli jednoznačnosti požadujeme aby mala kladné prvky na diagonále) a R je ortogonálna matica. Potom

$$P = K[R] - R\mathbf{C}.$$

Nájdenie matice kamery

Na zistenie matice kamery sa používa podobný postup ako pri hľadaní projektívnej transformácie. Na určenie kamery potrebujeme poznať dostatočný počet párov $\mathbf{X}_i \leftrightarrow \mathbf{x}_i$, kde $\mathbf{X}_i$ je bod priestoru v homogénnych súradniciach priestoru a $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, w_i)$ je bod obrazu vyjadrený homogénnych súradniciach priemetne.

Každý taký pár určí systém

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & -w_i\mathbf{X}_i^T & y_i\mathbf{X}_i^T \\ w_i\mathbf{X}_i^T & \mathbf{0}^T & -x_i\mathbf{X}_i^T \\ -y_i\mathbf{X}_i^T & x_i\mathbf{X}_i^T & \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Kde P^{iT} i -ty riadok matice P .

Ľahko vidno, že tieto tri rovnice sú lineárne závislé, preto stačí vziať prvé dva riadky

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & -w_i\mathbf{X}_i^T & y_i\mathbf{X}_i^T \\ w_i\mathbf{X}_i^T & \mathbf{0}^T & -x_i\mathbf{X}_i^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Pre n párov bodov dostávame systém s maticou rozmeru $2n \times 12$.

Matica kamery má 11 stupňov voľnosti. Na jej určenie preto potrebujeme 5,5 párov $\mathbf{X}_i \leftrightarrow \mathbf{x}_i$, t.j. päť párov určí desať rovníc a šiesty pár určí ďalšiu dvojicu, z ktorej vezmeme jednu rovnicu.

Pri praktickej implementácii a automatickom hľadaní párov bodov dostávame omnoho viac párov. Taktiež v tomto prípade vstupuje do hry šum. Dostávame tak homogénny systém s oveľa väčším počtom rovníc než neznámych. Hľadá sa potom riešenie, ktoré minimalizuje chybu, napríklad minimalizuje sa $\|\mathbf{A}\mathbf{p}\|$ (tzv. algebraická chyba) vzhľadom na $\|\mathbf{p}\| = 1$.

Páry bodov priestoru a obrazu sa získajú použitím kalibračného obrazca so známymi rozmermi, napríklad tri navzájom kolmé roviny so šachovnicovým vzorom



Obr. 1: R. Hartley, A. Zisserman: Multiple View Geometry in Computer Vision

Akcia projektívnej kamery na priamkach, rovinách a kužeľosečkách

- Roviny – Transformácia medzi priemetňou a rovinou v priestore je všeobecná rovinná homografia.
- Priamky – Priamka v priestore sa zobrazí na priamku v obraze.
- Spätná projekcia priamky – Množina bodov priestoru, ktorých obraz je priamka $\mathbf{l}$ v priemetni je rovina $P^T\mathbf{l}$, kde P je matica kamery.
- Spätná projekcia kužeľosečky C – $Q_{co} = P^T C P$ je kužeľ v priestore.
- Projekcia kvadriky Q je kužeľosečka C určená $C^* = P Q^* P^T$.

Kalibrácia kamery

Kalibráciu kamery nazývame nájdenie matice vnútorných parametrov (kalibračnej matice)

$$K \begin{pmatrix} \alpha_x & s & p_x \\ 0 & \alpha_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pozrime sa geometrickú interpretáciu tejto matice.

Bod $\mathbf{X}$ priestoru určuje lúč definovaný stredom $\mathbf{C}$ kamery a bodom $\mathbf{X}$. V euklidovských súradniciach kamery označme body lúča $\tilde{\mathbf{X}} = \lambda \mathbf{d}$, kde $\mathbf{d}$ je smerový vektor lúča. Potom

$$\mathbf{X} = K[I|\mathbf{0}](\lambda \mathbf{d}^T, 1)^T = K\mathbf{d}$$

až na škálu. Preto $\mathbf{d} = K^{-1}\mathbf{X}$. Kalibračná matica reprezentuje teda transformáciu medzi bodmi $\mathbf{X}$ priestoru a smermi $\mathbf{d}$ lúčov v euklidovskom súradnicovom systéme kamery.

Znalosť kalibračnej matice K umožňuje merať uhly medzi lúčmi pomocou vzorca

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{d}_1^T \mathbf{d}_2}{\sqrt{\mathbf{d}_1^T \mathbf{d}_1} \sqrt{\mathbf{d}_2^T \mathbf{d}_2}} = \frac{\mathbf{X}_1^T K^{-T} K^{-1} \mathbf{X}_2}{\sqrt{\mathbf{X}_1^T K^{-T} K^{-1} \mathbf{X}_1} \sqrt{\mathbf{X}_2^T K^{-T} K^{-1} \mathbf{X}_2}}$$

Na určenie kalibračnej kamery využijeme tzv. obraz absolútnej kužeľosečky. Absolútna kužeľosečka leží v nevlastnej rovine. Obrazy nevlastných bodov $\mathbf{X}_\infty = (\mathbf{d}^T, 0)^T$ kamerou s maticou $P = KR[I|\mathbf{C}]$ sú

$$\mathbf{x} = P\mathbf{X}_\infty = KR\mathbf{d}$$

Teda obrazy nevlastných bodov sú transformované planárnou homografiou $H = KR$.

Absolútna kužeľosečka Ω_∞ sa potom transformuje ako

$$\omega = H^{-T} \Omega_\infty H^{-1} = (KK^T)^{-1}$$

Teda vzorec pre uhol dvoch lúčov môžeme teraz prepísať ako

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{X}_1^T \omega \mathbf{X}_2}{\sqrt{\mathbf{X}_1^T \omega \mathbf{X}_1} \sqrt{\mathbf{X}_2^T \omega \mathbf{X}_2}}$$

Pre kolmé lúče $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$ teda dostávame

$$\mathbf{X}_1 \omega \mathbf{X}_1 = 0$$

Zo vzťahu $\omega = K^{-T}K^{-1}$ vidno, že ak poznáme ω vieme určiť K .

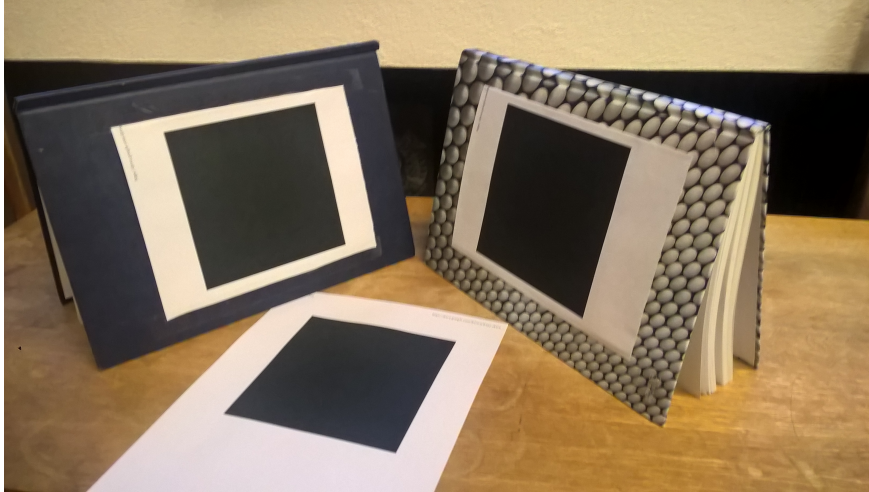
Ako jednoduchý kalibračný obrazec na určenie kalibračnej matice je možné použiť tri štvorce, ktoré nie sú navzájom rovnobežné. Vzťah medzi štyrmi rohmi štvorca a ich obrazmi určuje homografiu H medzi rovinou štvorca π a priemetňou. Aplikovaním tejto homografie na kruhové body $(1, \pm i, 0)$ dostávame dva body na ω . Z troch spomínaných štvorcov dostaneme šesť bodov ω . Na učenie kužeľosečky stačí päť bodov. Algoritmus výpočtu ω a K je nasledovný

1. Nájdite homografie H , ktoré vrcholy $(0, 0)^T$, $(1, 0)^T$, $(1, 1)^T$ a $(0, 1)^T$ štvorca transformujú na vrcholy príslušného štvorca v obraze.
2. Vypočítajte obrazy kruhových bodov ako $H(1, \pm i, 0)$. Ak $H = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$, obrazy kruhových bodov sú $\mathbf{h}_1 \pm i\mathbf{h}_2$.
3. Nájdite kužeľosečku ω . Ak $\mathbf{h}_1 \pm i\mathbf{h}_2$ leží na ω , tak $(\mathbf{h}_1 \pm i\mathbf{h}_2)^T \omega \mathbf{h}_1 \pm i\mathbf{h}_2 = 0$, z čoho dostávame podmienky

$$\mathbf{h}_1^T \omega \mathbf{h}_2 = 0, \quad \mathbf{h}_1^T \omega \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2^T \omega \mathbf{h}_2 = 0.$$

čo sú lineárne rovnice. ω je určená z aspoň piatich z nich.

4. Použitím Choleského faktorizácie na ω nájdeme K .



Obr. 2: DIY kalibračný obrazec, originálne rozmery 3264×1840

Z kalibračného obrazca na obr. 1 spočítame kalibračnú kameru K

$$K = \begin{pmatrix} 2569,4 & -32,2 & 1655,3 \\ 0 & 2574,5 & 934,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$