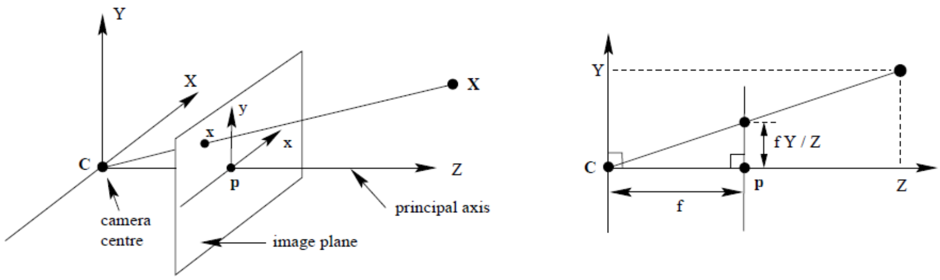
Matematický model konečnej projektívnej kamery



Obr. 1: R. Hartley, A. Zisserman: Multiple View Geometry in Computer Vision

Model vychádza zo štandardnej stredovej projekcie. Obrazom bodu $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ je priesečník spojnice bodu $\mathbf{X}$ a stredu kamery $\mathbf{C}$ s priemetňou (image plane). s kamerou spriahneme karteziánsku súradnicovú sústavu ako na obr 1. Stred súradnicovej sústavy je stred kamery, osi $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ sú rovnobežné s priemetňou, os $\mathbf{Z}$ je kolmá na priemetňu – nazýva sa tiež hlavná os. Nech f označuje ohniskovú vzdialenosť (vzdialenosť stredu kamery od priemetne). Ak $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^T$ sú súradnice bodu $\mathbf{X}$ v tejto súradnicovej sústave, jeho obraz je bod so súradnicami $(fX/Z, fY/Z, f)^T$. V súradniciach priemetne $(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ indukovaných so súradníc kamery má bod $\mathbf{X}$ súradnice $(fX/Z, fY/Z)^T$. Stred $\mathbf{p}$ spomínanej súradnicovej sústavy priemetne sa nazýva hlavný bod a je prienikom priemetne a hlavnej osi.

Tým je definované zobrazenie

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} fX/Z \\ fY/Z \end{pmatrix}$$

Prechodom k homogénnym súradniciam získame zobrazenie

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & & & 0 \\ & f & & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

V skrátenej forme môžeme posledný výraz zapísať

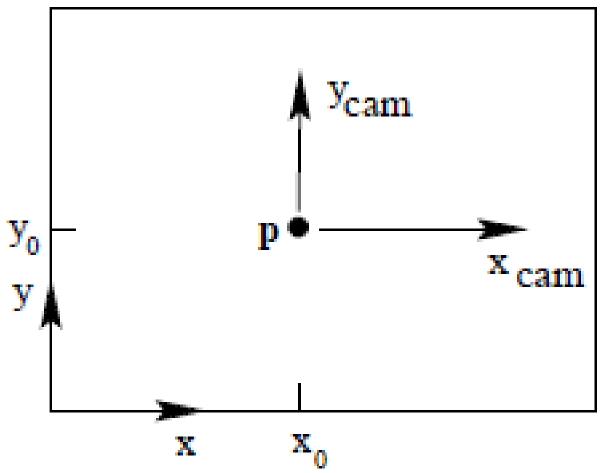
$$\mathbf{x} = P\mathbf{X},$$

kde $P = \mathrm{diag}(f, f, 1)[I, \mathbf{0}]$. Matica $K = \mathrm{diag}(f, f, 1)$ je 3×3 diagonálna matica, $[I, \mathbf{0}]$ je 3×4 matica s 3×3 ľavou podmaticou reprezentujúcou identitu a posledným stĺpcom nulovým. Maticu K nazývame matica kamery alebo tiež kalibračná matica.

Pokiaľ súradnicová sústava priemetne je iná ako súradnicová sústava indukovaná súradnicovou sústavou kamery, matica K bude mať tvar

$$K = \begin{pmatrix} f & & p_x \\ & f & p_y \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

kde $(p_x, p_y)^T$ sú súradnice hlavného bodu v súradnicovej sústave priemetne.



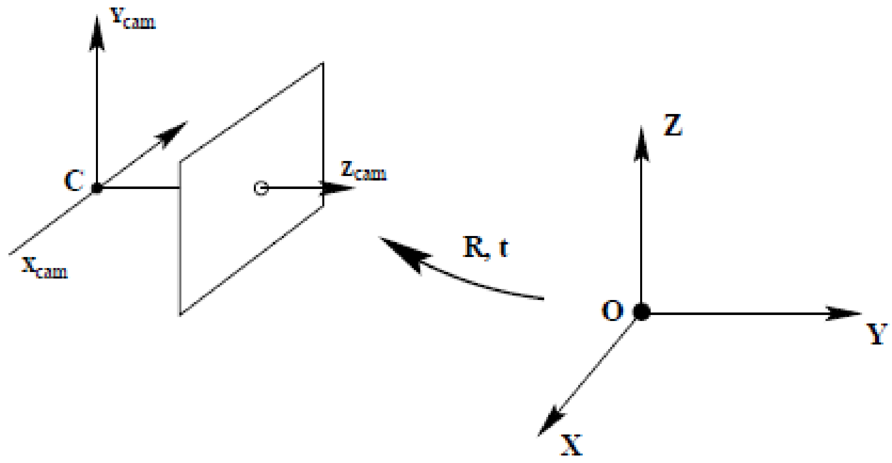
Obr. 2: R. Hartley, A. Zisserman: Multiple View Geometry in Computer Vision

Vo všeobecnosti súradnice bodu priestoru bývajú vyjadrené v nejakých svetových súradniciach. Vzťah medzi svetovou súradnicovou sústavou a súradnicovou sústavou kamery je určený ortogonálnou maticou R a transláciou (obr 3.). Ak $\widetilde{\mathbf{C}}$ označuje súradnice stredu kamery v svetovej súradnicovej sústave, maticu P je možné zapísať ako

$$P = KR[I| - \widetilde{\mathbf{C}}]$$

Matica P sa nazýva matica projektívnej kamery reprezenuje projektívne zobrazenie. Kameru s kalibračnou maticou K tvaru

$$K = \begin{pmatrix} f & s & p_x \\ & f & p_y \\ & & 1 \end{pmatrix}$$



Obr. 3: R. Hartley, A. Zisserman: Multiple View Geometry in Computer Vision

nazývame konečná projektívna kamera. Parameter s je parameter zošikmenia a pre väčšinu kamier je nulový. Súčin KR je nesingulárna matica. Naopak, každá 3×4 matica s nesingulárnou 3×3 ľavou podmaticou je maticou nejakej konečnej projektívnej kamery.

Všeobecná projektívna kamera je kamera reprezentovaná 3×4 projektívnou kamerou hodnosti 3.

Pozrime sa aké informácie a akým spôsobom sú zakódované v matici projektívnej kamery $P = [M|\mathbf{p}_4]$, M je 3×3 podmatica a $\mathbf{p}_4$ je posledný stĺpec matice P.

Stred kamery

Pre prípad konečnej projektívnej kamery

$$P = KR[I| - \widetilde{\mathbf{C}}]$$

stred kamery $\mathbf{C}$ má súradnice $(\mathbf{C}^T, 1)^T$. Jednoduchým vynásobením dostaneme

$$KR[I| - \widetilde{\mathbf{C}}] \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{C}} \\ 1 \end{pmatrix} = KR\widetilde{\mathbf{C}} - KR\widetilde{\mathbf{C}} = 0$$

Súradnice stredu kamery tvoria vektor, ktorý je riešením homogénneho systému s maticou P.

Pre všeobecnú projektívnu kameru ak $\mathbf{C}$ je taký že $P\mathbf{C} = 0$, pre ľubovoľnú priamku určenú ešte bodom $\mathbf{A}$

$$\mathbf{X}(\lambda) = \lambda\mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{C}$$

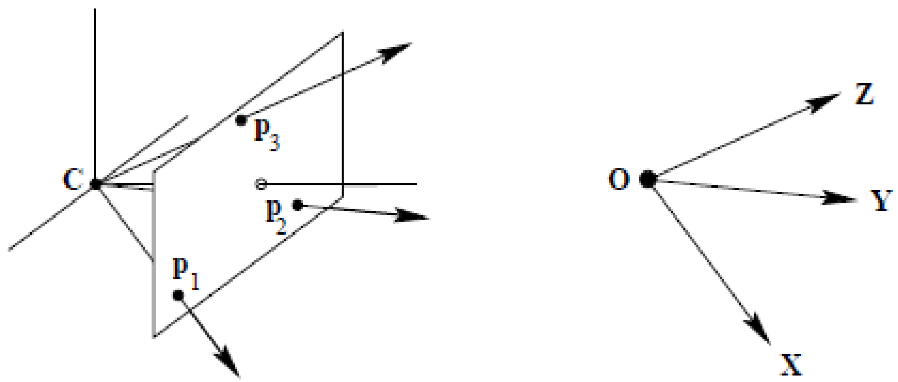
jej obraz maticou P je

$$P\lambda\mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{C} = \lambda P\mathbf{A}.$$

Teda každý bod priamky $\mathbf{X}(\lambda)$ sa zobrazí do jediného bodu priemetne, čo znamená, že táto priamka prechádza stredom kamery. Toto platí pre každú priamku určenú bodom $\mathbf{C}$ a ľubovoľným iným bodom $\mathbf{A}$, preto C je stredom kamery.

Stĺpcové vektory matice P

Pre $P = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4]$, stĺpce $\mathbf{p}_1$ až $\mathbf{p}_3$ reprezentujú postupne úbežníky svetových súradnicových osí X, Y a Z. Nevlastný bod osi X má homogénne súradnice $\mathbf{D} = (1, 0, 0, 0)$. Jeho obraz $PD = \mathbf{p}_1$ je úbežník osi X v priemetni. Podobne pre zvyšné súradnicové osi. Stĺpec $\mathbf{p}_4$ je obraz počiatku svetového súradnicového systému.



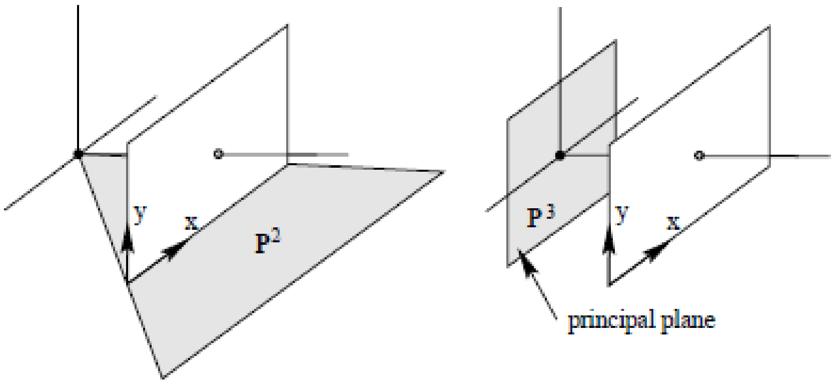
Obr. 4: R. Hartley, A. Zisserman: Multiple View Geometry in Computer Vision

Riadkové vektory matice P

Riadkové vektory sú vektory dĺžky 4, ktoré vo všeobecnosti reprezentujú roviny. Označme $\mathbf{p}^i$, $i = 1, 2, 3$ riadky matice P.

Hlavná rovina je rovina rovnobežná s priemetňou, ktorá prechádza stredom kamery. Pozostáva z bodov, ktorých obrazy zobrazením P ležia na nevlastnej priamke. Symbolicky $P\mathbf{X} = (x, y, 0)^T$. Preto bod $\mathbf{X}$ leží na hlavnej rovine práve vtedy, keď $\mathbf{p}^{3T}\mathbf{X} = 0$. Stĺpec $\mathbf{p}_3$ tým pádom reprezentuje hlavnú rovinu.

Podobným spôsobom sa ukáže, že $\mathbf{p}^1$ a $\mathbf{p}^2$ reprezentujú roviny určené stredom kamery a súradnicovými osami priemetne.



Obr. 5: R. Hartley, A. Zisserman: Multiple View Geometry in Computer Vision

Hlavný bod

Pre P v tvare $[M|\mathbf{p}_4]$ hlavný bod sa nájde ako

$$x_0 = M\mathbf{m_3},$$

kde m_3^T je tretí riadok matice M.

Akcia projektívnej kamery

- Dopredná projekcia – $P = [M|\mathbf{p}_4]$ je chápané ako projektívne zobrazenie. Obrazom bodu $\mathbf{X}$ je bod $\mathbf{x} = P\mathbf{X}$. Obrazom nevlastného bodu $\mathbf{D} = (\mathbf{d}^T, 0)^T$ je úbežník príslušnej triedy priamok a je určený len maticou M

$$P\mathbf{D} = [M|\mathbf{p}_4](\mathbf{d}^T, 0)^T = M\mathbf{d}.$$

- Spätná projekcia bodov na lúče – K danému bodu $\mathbf{x}$ v obraze nájdeme všetky body, ktoré sa danou maticou kamery P zobrazia na $\mathbf{x}$. Tieto tvoria priamku, ktorá je určená stredom kamery $\mathbf{C}$ a bodom $\mathbf{X} = P^{+}\mathbf{x}$, kde $P^{+} = P^{T}(PP^{T})^{-1}$ je pseudoinverzná matica k matici P. Platí $PP^{+} = I$, preto $P\mathbf{X} = \mathbf{x}$. Výsledná priamka je teda

$$\mathbf{X}(\lambda) = P^{+}\mathbf{x} + \lambda C.$$