

Rekonštrukcia afinnej a metrickej štruktúry z obrazu

Afinná štruktúra

Rekonštrukcia afinnej štruktúry v obraze je založená na fakte, že každá afinná transformácia zachováva nevlastnú priamku a naopak transformácia, ktorá zachováva nevlastnú priamku je afinná. Podrobnejšie, afinnou transformáciou

$$H_A = \begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

je nevlastná priamka reprezentovaná ako $\mathbf{l}_\infty = (0, 0, 1)^T$ transformovaná na

$$H_A^{-T} \mathbf{l}_\infty = H_A = \begin{pmatrix} A^{-T} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{t}^T A^{-T} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{l}_\infty.$$

Naopak transformácia

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix},$$

ktorá transformuje nevlastnú priamku na nevlastnú priamku, zobrazí nevlastný bod $(x, 0, 0)$, $x \neq 0$ na nevlastný bod $(*, *, 0)$ a teda musí byť $h_{31} = 0$ a z podobného dôvodu $h_{32} = 0$.

Ak teda v obraze transformovanom projektívnou transformáciou nájdeme priamku, ktorá je obrazom nevlastnej priamky, môžeme zostrojiť projektívnu transformáciu, ktorá transformuje nájdenu priamku späť na nevlastnú. Pre priamku reprezentovanú $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)^T$ má táto transformácia tvar

$$H = H_A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix},$$

kde H_A je ľubovoľná afinná transformácia.

Metrická štruktúra

Podobnú ideu použijeme na rekonštrukciu metrickej štruktúry v obraze. Úlohu nevlastnej priamky v tomto prípade budú hrať tzv. kruhové body a z nich odvodené geometrické objekty.

Kruhové body získame ako prienik kružnice s nevlastnou priamkou. Rovnica žnice v homogénnych súradniciach je

$$(x - aw)^2 + (y - bw)^2 = r^2 w^2.$$

Body nevlastnej priamky majú (v euklidovskom prípade) súradnicu w nulovú. Z toho už ľahko ukážeme, že homogénne súradnice bodov prieniku kružnice a nevlastnej priamky sú

$$\mathbf{I} = (1, i, 0) \qquad \mathbf{J} = (1, -i, 0).$$

kde i je imaginárna jednotka.

Pomerne jednoduchým výpočtom sa dá ukázať, že tieto body sú invariantné vzhľadom na transformáciu podobnosťou

$$H_S = \begin{pmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta & t_1 \\ s \sin \theta & s \cos \theta & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a naopak transformácia, ktorá zachováva kruhové body je podobnosť.

Nevýhoda kruhových bodov je zrejmä – sú komplexné. Preto pomocou nich definujeme kužeľosečku duálnu ku kruhovým bodom. Označíme ju C_∞^* a je definovaná ako

$$C_\infty^* = \mathbf{I}\mathbf{J}^T + \mathbf{J}\mathbf{I}^T.$$

Je to degenerovaná kužeľosečka, v euklidovskom súradnicovom systéme určená maticou

$$C_\infty^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Platí, že C_∞^* je úplne invariantná vzhľadom na podobnosti, t.j.

$$C_\infty^{*I} = H_S C_\infty^* H_S^T = C_\infty^*$$

a naopak, transformácia zachovávajúca C_∞^* je podobnosť.

Ak poznáme C_∞^* v projektívne transformovanom obraze, dokážeme vypočítat uhly priamok. Projektívne invariantná definícia uhla dvoch priamok $\mathbf{l}$ a $\mathbf{m}$ je

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{l}^T C_\infty^* \mathbf{m}}{\sqrt{(\mathbf{l}^T C_\infty^* \mathbf{l})(\mathbf{m}^T C_\infty^* \mathbf{m})}}$$

Je to v princípe klasická definícia uhla pomocou skalárneho súčinu, len s pridanou kužeľosečkou duálnou ku kruhovým bodom.

Jednoduchým dôsledkom je, že priamky $\mathbf{l}$ a $\mathbf{m}$ sú kolmé práve vtedy, keď $\mathbf{l}^T C_\infty^* \mathbf{m} = 0$.

Metrickú štruktúru teda môžeme nájsť identifikovaním kužeľosečky C_∞^* . Každú projektívnu transformáciu H je možné zapísať ako súčin

$$H = H_P H_A H_S = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sR & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

kde I je 2×2 matica s jednotkami na diagonále, K je horná trojuholníková matica a H_S je všeobecná matica podobnosti.

Kužeľosečka C_∞^* (v euklidovskom prípade) sa potom všeobecnou projektivitou transformuje na tvar

$$\begin{aligned} C_\infty^{*'} &= (H_P H_A H_S) C_\infty^* (H_P H_A H_S)^T = (H_P H_A) C_\infty^* (H_P H_A)^T \\ &= \begin{pmatrix} K K^T & K K^T \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T K K^T & \mathbf{v}^T K K^T \mathbf{v} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Predpokladajme, že daný obraz je afinne rektifikovaný (t.j. obraz nevlastnej priamky bol transformovaný na nevlastnú priamku). Potom C_∞^* má tvar

$$C_\infty^* = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & 0 \\ s_2 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ak $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$ a $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ sú navzájom kolmé priamky, z podmienky pre kolmosť dostaneme rovnicu

$$(l_1 m_1, l_1 m_2 + l_2 m_1, l_2 m_2) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Určením dvoch párov navzájom kolmých priamok dostaneme dve rovnice o troch neznámych s_1, s_2, s_3 ktoré určia C_∞^* až na skalárny násobok.

Príslušnú afinnú transformáciu H_A , presnejšie maticu K afinnej časti rozkladu projektivity H , nájdeme pomocou Choleskeho faktorizácie kladne definitnej symetrickej matice S .

Za daných predpokladov, $S = U D U^T$, kde U je ortogonálna a D je diagonálna, napíšme $D = E E^T$ (E je vlastne druhá odmocnina D). Potom $S = (U E)(U E)^T$ a RQ rozklad matice $U E$ dáva $U E = RQ$, kde R je horná trojuholníková a Q ortogonálna. Potom $S = (RQ)(RQ)^T = R Q Q^T R^T = R R^T$ a R je hľadaná matica K lebo uvedený rozklad je jednoznačný.



Obr. 1: Afinnú a metrickú rektifikáciu predvedieme na obrázku dlaždíc. Afinná rektifikácia vyžaduje nájdenie nevlastnej priamky. Jedna z možností, ako takú priamku nájsť je nájsť dva rôzne úbežníky v obrázku, čiže body, v ktorých sa zbiehajú rovnobežné priamky. Ak predpokladáme, že dlaždice sú štvorcové, dva páry rovnobežných priamok môžeme získať napríklad voľbou štyroch bodov (prípadne môžeme priamo rovnobežky získať sofistikovanejšími metódami, napr. Houghovou transformáciou)



Obr. 2: Obrázok dlaždíc po afinnej rektifikácii – môžeme si všimnúť že strany dlaždíc sú rovnobežné. Určenie dvoch párov priamok zvierajúcich pravé uhly v tomto obrázku nám umožní obraz rektifikovať metricky. Vďaka predpokladu štvorcových dlaždíc môžeme ako hľadané priamky zvoliť dve nerovnobežné strany dlaždice a uhlopriečky dlaždice.



Obr. 3: Obrázok dlaždíc po metrickej rektifikácii – všimnime si, že dlaždica je už štvorcová, ale natočená. To je prejav faktu, že nájdená transformácia je určená až na podobnosť. Tiež si môžeme všimnúť, že hrany nádob sa transformovali z elips na kruhy. Samotné nádoby sú samozrejme oproti skutočnosti deformované, pretože hľadaná transformácia je transformácia roviny, čiže sa ticho predpokladá, že všetky objekty na obrázku ležia v jednej rovine.