Multiple view geometry

V počítačovom videní je snaha napodobniť fungovanie ľudského zrakového vnímania. Jedna z vlastností, ktorú máme, je schopnosť vnímať hĺbku priestoru. Táto schopnosť je z veľkej časti zabezpečená tým, že máme dve vhodne umiestnené oči. Z toho už ľahko prejdeme k otázke, ako je možné napríklad pomocou dvoch, prípadne viacerých dvojrozmerných obrazov nejakého objektu tento objekt zrekonštruovať. Potrebujeme teda skúmať vzťahy medzi bodmi z reálneho priestoru a ich obrazmi v jednotlivých dvojrozmerných obrazoch.

Ako veľmi užitočná sa v tomto smere ukazuje projektívna geometria. Je to aj z toho dôvodu, že model klasického fotoaparátu () je dobre popísaný práve pomocou projektívnej geometrie. Na začiatok teda uvedieme rýchly prehľad pojmov a vlastností projektívnej geometrie.

Euklidovská, afinná a projektívna geometria

Klasicky sa priestor v ktorom žijeme modeluje pomocou priestoru $\mathbb{R}^3$. Podobne priestor $\mathbb{R}^2$ môžeme použiť na modelovanie fotografie. Zavedením súradníc môžeme body týchto priestorov opísať pomocou trojíc, resp. dvojíc reálnych čísel, (a, b, c) resp. (a, b). Tzv. rozšírené afinné súradnice získame z predchádzajúcich pridaním 1, $(a, b, c, 1)$ resp. $(a, b, 1)$. Zavedením relácie ekvivalencie

$$
\begin{aligned}
(x, y, z, w) &\sim (kx, ky, kz, kw),\ k \neq 0 \\
(x, y, z) &\sim (kx, ky, kz),\ k \neq 0
\end{aligned}
$$

Získame homogénne súradnice vo faktorovom priestore $\mathbb{R}_*^{n+1}/_\sim \equiv P^n$, $n = 2, 3$, kde $\mathbb{R}_*^{n+1}$ sú nenulové $n+1$-tice reálnych čísel. Body s homogénnymi súradnicami $(x, y, 1)$ nazývame vlastné body. Okrem nich sú v P^n ja body s homogénnymi súradnicami $(x, y, z, 0)$, ktoré nazývame nevlastné.

Z homogénnych súradníc v P^2 prejdeme k nehomogénnym jednoduchým spôsobom

$$
(a, b, c) \sim \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right) \longleftrightarrow (\frac{a}{c}, \frac{b}{c})
$$

V P^2 body s homogénnymi súradnicami $(x, y, 0)$ tvoria tzv. nevlastnú priamku tiež niekedy nazývanú 'priamka v nekonečne'. V P^3 body $(x, y, z, 0)$ tvoria nevlastnú rovinu.

Homogenita

Euklidovský priestor $\mathbb{R}^n$ je homogénny v zmysle, že v ňom neexistuje význačný bod. Voľbou karteziánskej súradnicovej sústavy síce získame stred tejto sústavy ako význačný bod, avšak každú karteziánsku sústavu vieme transformovať na ľubovoľnú inú pomocou ortogonálnych transformácii.

V afinnom priestore je to podobné, len súradnice volíme afinné a transformácie súradníc sú tiež afinné.

Vo vyššie zavedenom projektívnom priestore – k vlastným bodom $\mathbb{R}^2$ so súradnicami $(a, b, 1)$ pridáme nevlasnté body so súradnicami $(x, y, 0)$ – máme zdanlivo odlišné vlastné a nevlastné body. Avšak použitím tzv. projektívnych transformácií je možné ľubovoľný, či už vlastný alebo nevlastný bod transformovať na ľubovoľný iný. Tým sa aj tu teda stráca rozdiel medzi vlastným a nevlastným bodom.

Priamky v dvojrozmernom projektívnom priestore

V tejto časti budeme pracovať v priestore P^2. Analytická rovnica priamky $\mathbf{l}$ je

$$ax + by + cz = 0.$$

Po homogenizovaní $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$,

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Priamku $\mathbf{l}$ teda vieme určiť trojicou $(a, b, c)^T$, pričom ľubovoľný násobok tejto trojice určuje rovnakú priamku. Avšak body chápeme tiež ako trojice. Z toho vidno dualitu medzi bodmi a priamkami v projektívnom priestore. Bod $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ je bodom priamky $\mathbf{l} = (a, b, c)$ pvk

$$\mathbf{l}^T\mathbf{x} = 0,$$

v zmysle súčinu matíc, čo je len iný prepis homogénnej verzie rovnice priamky.

Priesečník priamok $\mathbf{l}$ a $\mathbf{k}$ je bod

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{k}.$$

Tu $\times$ označuje klasický vektorový súčin vektorov (body aj priamky sú trojice a preto je vektorový súčin možné formálne použiť).

Kužeľosečky v dvojrozmernom projektívnom priestore

Všeobecná kužeľosečka je určená rovnicou

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Po homogenizovaní podobne ako v prípade priamok dostaneme

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0.$$

Vidíme, že ľavá strana je kvadratická forma, a preto ju možno reprezentovať symetrickou maticou

$$C = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}.$$

Homogénnu verziu rovnice kužeľosečky potom môžeme prepísať na tvar

$$\mathbf{x}^T C\mathbf{x} = 0. \tag{1}$$

Priamo z rovnice kužeľosečky sa dá jednoducho odvodiť, že na jednoznačné určenie jej určenie potrebujeme zvoliť 5 bodov, (x_i, y_i). Ich voľbou získame systém 5 rovníc o 6 neznámych.

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_2y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Riešenia tohoto systému určujú kužeľosečku.

Dotyčnica ku kužeľosečke má v projektívnom priestore veľmi jednoduché vyjadrenie. Dotyčnica $\mathbf{l}$ ku kužeľosečke určenej maticou C v bode $\mathbf{x}$ je $\mathbf{l} = C\mathbf{x}$.

Takto definovaná priamka prechádza bodom $\mathbf{x}$, pretože $\mathbf{l}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T C\mathbf{x} = 0$, lebo $\mathbf{x}$ je bodom kužeľosečky. Ak je to jediný bod, ktorým prechádza, potom je to dotyčnica. Ak $\mathbf{l}$ prechádza ešte iným bodom $\mathbf{y}$ kužeľosečky C, tak $\mathbf{y}^T C\mathbf{y} = 0$ a $\mathbf{x}^T C\mathbf{y} = \mathbf{l}^T\mathbf{y} = 0$. Potom

$$(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})^T C(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) = 0.$$

Tým pádom celá priamka $\mathbf{l}$ leží v kužeľosečke a C je degenerovaná, t.j. matica C je singulárna.

Rovnica (1) definuje kužeľosečku ako množinu bodov. Vďaka dualite medzi bodmi a priamkami môžeme definovať rovnicu kužeľosečky na priamkach. Ak $\mathbf{l}$ je dotyčnicou kužeľosečky C, spĺňa rovnicu $\mathbf{l}^T C^* \mathbf{l}$, kde C^* je adjungovaná matica k matici C. V prípade, že C je regulárna, odvodenie rovnice duálnej kužeľosečky je jednoduché. Už vieme, že dotyčnica ku kužeľosečke C v bode $\mathbf{x}$ je $\mathbf{l} = C\mathbf{x}$, teda $C^{-1}\mathbf{l} = \mathbf{x}$. Preto

$$\mathbf{x}^T C \mathbf{x} = \mathbf{l}^T C^{-T} C C^{-1} \mathbf{l} = \mathbf{l}^T C^{-1} \mathbf{l}$$

a C^{-1} je násobok adjungovanej matice k matici C.

Transformácie

Definitoricky, projektívna transformácia, alebo tiež projektivita, je bijektívne zobrazenie $h : P^2 \to P^2$ také, že pre tri ľubovoľné body $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ ležiace na jednej priamke body $h(\mathbf{x}_1)$, $h(\mathbf{x}_2)$, $h(\mathbf{x}_3)$ ležia tiež na jednej priamke. Platí:

Zobrazenie $h : P^2 \to P^2$ je projektivita práve vtedy, keď existuje regulárna 3×3 matica H taká, že pre každý bod v P^2 reprezentovaný vektorom $\mathbf{x}$ platí $h(\mathbf{x}) = H\mathbf{x}$.

Každá projektívna transformácia na P^2 je teda reprezentovaná 3×3 regulárnou maticou. Dve matice, ktoré sa líšia o skalány násobok reprezentujú tú istú projektívnu transformáciu.

Transformácie priamok

Ak H reprezentuje transformáciu bodov $\mathbf{x}$ projektívneho priestoru a $\mathbf{l}$ je priamka v projektívnom priestore, máme $\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$ a body priamky sú dané rovnicou $\mathbf{l}^T\mathbf{x} = 0$. Preto

$$\mathbf{l}^T \mathbf{x} = \mathbf{l}^T H^{-1} H x = (\mathbf{l}^T H^{-1})\mathbf{x}' = 0.$$

Teda ak H je transformácia bodov, H^{-T} je transformácia priamok,

$$\mathbf{l}' = H^{-T}\mathbf{l}$$

Transformácia kužeľosečiek

Pri transformácii bodov $\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$ sa kužeľosečka C transformuje na kužeľosečku C' podľa

$$C' = H^{-T} C H^{-1}.$$

Duálna kužeľosečka sa transformuje ako

$$C^{*\prime} = H C^* H^T.$$

Hierarchia transformácii

1. **Izometrie**

$$H_E = \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}, \quad R \in O(2).$$

   Invarianty: Dĺžky, uhly, obsahy.

2. **Podobnosti**

$$H_S = \begin{pmatrix} aR & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}, \quad R \in O(2),\ a \in \mathbb{R}.$$

   Invarianty: Uhly, pomery dĺžok, pomery obsahov.

3. **Afinné transformácie**

$$H_A = \begin{pmatrix} M & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}, \quad M \in GL(2).$$

   Invarianty: Deliaci pomer, rovnobežnosť,

4. **Projektívne transformácie**

$$H_P = \begin{pmatrix} M & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^T & v \end{pmatrix}.$$

   Invarianty: Dvojpomer.