

## Filtrácia v priestorovej oblasti

Ako už bolo spomenuté, filtrovanie signálu vo frekvenčnej oblasti, t.j. súčin spektra signálu  $F$  s filtračnou funkciou  $G$  je ekvivalentné s konvolúciou signálu  $f$  s funkciou  $g$ , ktorej spektrum je  $G$ .

Pretože pracujeme s diskretným (resp. digitálnym) dvojrozmerným signálom – obrazom, pre tento prípad je konvolúcia obrazu  $g$  a funkcie  $h$ , ktorú nazývame 'konvolučné jadro', modelovaná nasledujúcou formulou

$$f(i, j) = \sum_{(m,n) \in \mathcal{O}} h(i - m, j - n)g(m, n),$$

kde  $\mathcal{O}$  je lokálne okolie pixelu  $(i, j)$  v obraze. Najčastejšie sa ako okolie berie obdĺžnik s nepárnym počtom pixelov v riadkoch a stĺpcoch, ktoré umožňuje určiť centrálny pixel okolia  $\mathcal{O}$ .

Ako príklad spočítajme konvolúciu obrazovej funkcie s maticou

|   |   |   |    |
|---|---|---|----|
| 2 | 1 | 3 | 3  |
| 1 | 0 | 2 | 7  |
| 2 | 1 | 1 | -2 |
| 3 | 1 | 2 | 1  |

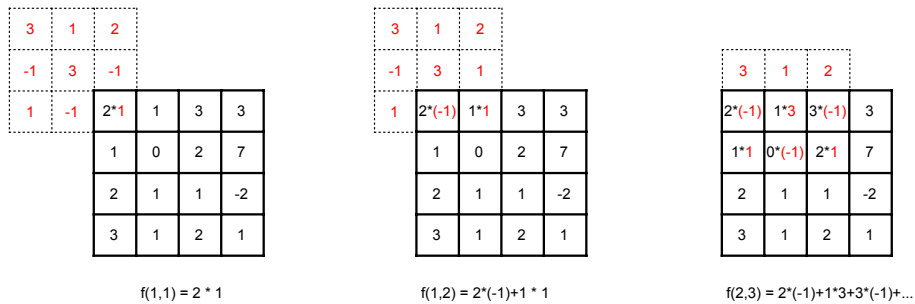
a konvolučného jadra

|    |    |    |
|----|----|----|
| 1  | -1 | 1  |
| -1 | 3  | -1 |
| 2  | 1  | 3  |

Jednoduchá pomôcka je 'obrútiť' konvolučné jadro,

|    |    |    |
|----|----|----|
| 3  | 1  | 2  |
| -1 | 3  | -1 |
| 1  | -1 | 1  |

a postupne prekrývať maticu konvolučným jadrom a počítat súčty súčinov prekrývajúcich sa prvkov



Výsledkom je

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 2  | -1 | 4  | 1  | 0  | 3  |
| -1 | 4  | 1  | 10 | 1  | 4  |
| 5  | 5  | 12 | 9  | 34 | 0  |
| 3  | 4  | 11 | 20 | 7  | 24 |
| 1  | 12 | 7  | 4  | 2  | -7 |
| 6  | 5  | 14 | 7  | 7  | 3  |

Obr. 1: Výsledok konvolúcie  $f(i, j)$

Samozrejme, pre prípad obrazu očakávame, že výsledok bude mať rovnaké rozmery, ako pôvodný obraz. Na to dobre poslúži práve voľba prostredného prvku jadra. V našom prípade teda výsledný obraz po konvolúcii by bola  $4 \times 4$  podmatica začínajúca prvkom  $f(2, 2)$ .

### Špeciálne filtre

V predošlej časti sme odstraňovali šum v obraze pomocou prechodu do frekvenčnej oblasti. Častokrát v prípadoch nie veľmi výrazného zašumenia špecifického typu (biely šum, salt and pepper) je vhodné tento šum filtrovať priamo v priestorovej oblasti. Najjednoduchší filter je priemerovací, ktorý je definovaný konvolučným jadrom

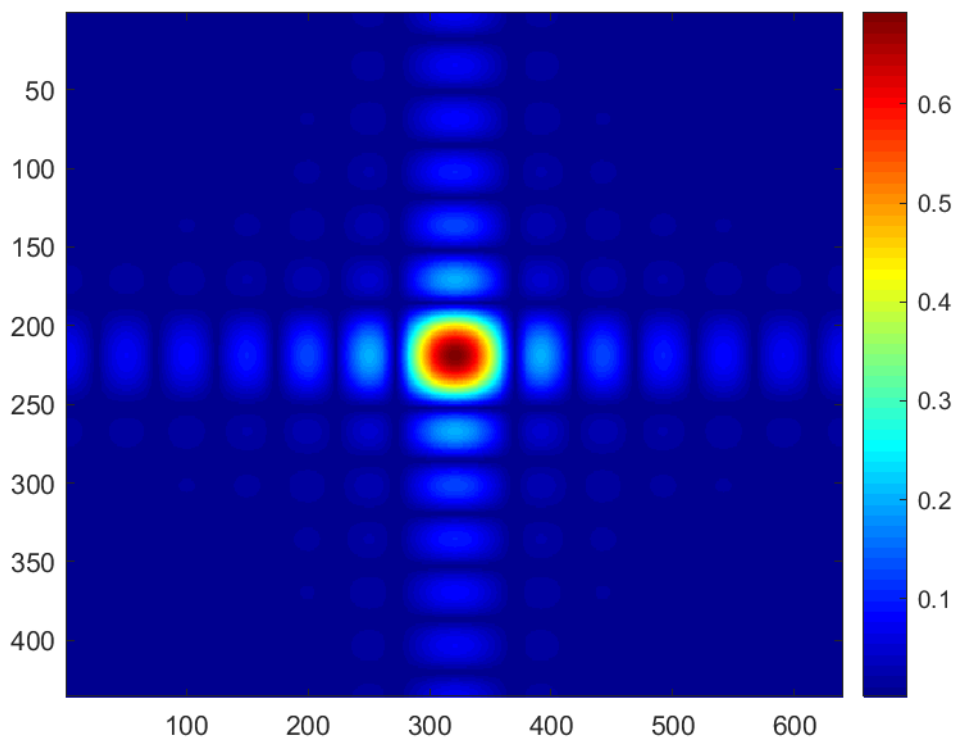
$$h = \frac{1}{mn} \mathcal{I}_{m,n},$$

kde  $\mathcal{I}_{m,n}$  je matica obsahujúca ako všetky svoje prvky len 1. Príklad  $3 \times 3$  priemerovacieho konvolučného jadra je

$$h = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Význam z hľadiska konvolúcie je zrejмый. Daná intenzita pixelu výsledného obrazu je určená priemerom intenzít pixelov v okolí daného pixelu (napr.  $3 \times 3$  okolí) v pôvodnom obraze.

Vo frekvenčnom spektre má priemerovací filter amplitúdové spektrum ako nižšie (pre  $3 \times 3$  jadro a  $200 \times 200$  obraz)



Obr. 2: Amplitúdové spektrum priemerovacieho filtra

Takže tento filter môžeme považovať za dolnopriepustný, avšak vidíme, že niektoré vyššie frekvencie majú tiež vplyv na výsledok.

Ďalší typ často používaného konvolučného jadra je gaussovské jadro.

$$h(i, j) = \frac{1}{\sum e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}} e^{-\frac{i^2+j^2}{2\sigma^2}}$$

Spektrum tohto konvolučného jadra je Gaussián v priestorovej oblasti a o filtrovanie Gaussiánom sme hovorili v minulej časti. Len ako zhrnutie: Čím väčšie  $\sigma$ , t.j. šírka konvolučného jadra v priestorovej oblasti, tým je vo frekvenčnej oblasti užší príslušný gaussovský filter, a teda tým viac vysokých frekvencií bude týmto filtrom potlačených.

Filtrácia konvolúciou je tzv. lineárna filtrácia. Výhoda lineárnej filtrácie je najmä v rýchlosti, ktorá sa dá zlepšiť použitím tzv. separabilných filtrov. Separabilnosť v 2D znamená, že konvolučné jadro sa dá napísať ako súčin dvoch jednorozmerných vektorov.

Medzi nelineárne filtre patrí napr. Mediánový filter. Ten nahrádza intenzitu daného pixela mediánom intenzít v danom okolí tohoto pixela.

Podobne je možné definovať maximový a minimový filter.

## Hranové filtre

Hranové filtre detegujú zmeny intenzity v obraze. Práve hrany sú tie oblasti v obraze, kde sa prudko mení intenzita.

'Hranovosť' je vlastnosť pixela a počíta sa z vlastnosti funkcie v okolí tohoto pixela. Je určená veľkosťou (magnitúdou) gradientu a smerom.

Veľkosť gradientu pre spojitú funkciu sa spočíta ako

$$|\text{grad } g(x, y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$

V prípade, že nás zaujíma len magnitúda hrany, dá sa použiť diferenciálny operátor Laplacián

$$\nabla^2 g(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

V prípadoch diskretných funkcií je potrebné vyššie uvedené vzorce, resp. derivácie v nich aproximovať pomocou diferencií.

Gradientné operátory môžeme rozdeliť do troch kategórií:

1. Operátory aproximujúce derivácie pomocou diferencií.
2. Operátory založené na na prechode nulou druhej derivácie obrazovej funkcie.
3. Operátory založené na hľadaní parametrického modelu hrán.

Do prvej kategórie patria známe gradientné operátory:

**Robertsov operátor** s konvolučnou maskou

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Prewittovej operátor** s konvolučnými maskami

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Laplaceov operátor** Pre 4-okolia a 8-okolia

$$h_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad h_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Sobelov operátor**

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Robinsonov operátor**

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

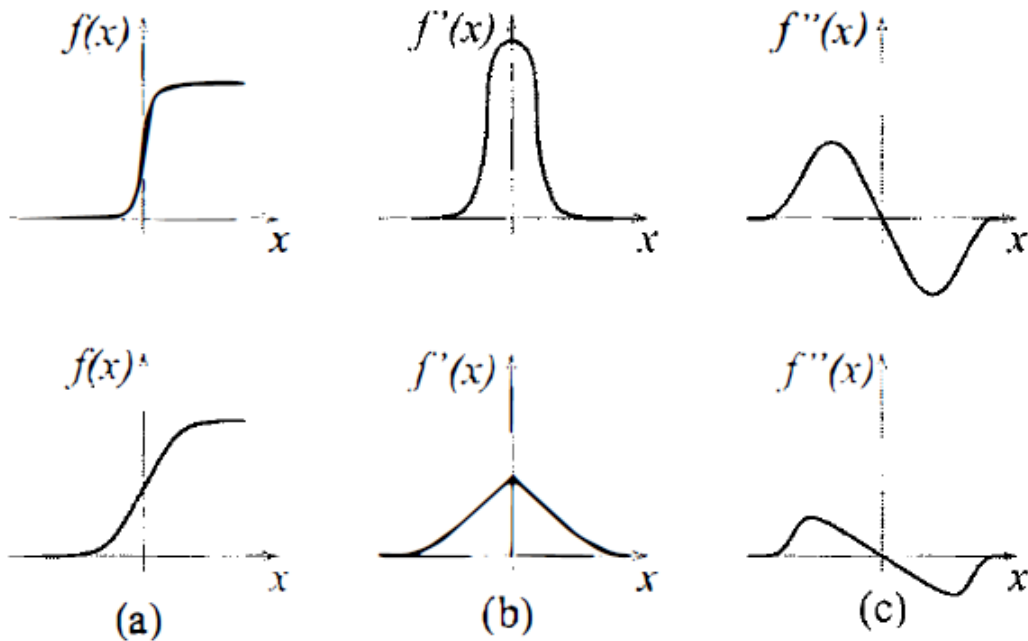
**Kirschov operátor**

$$h_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Okrem Laplaceovho a Robertsovho operátora rotáciou masiek okolo stredného prvku môžeme získať aj smer gradientu v závislosti od veľkosti odozvy príslušnej masky. V prípade Prewittovej resp Sobelovho operátora pomocou uvedených masiek  $h_1$  a  $h_2$  získame obrazy s odozvami hrán  $x$  a  $y$ . Gradientný obraz spočítame podľa vzorca  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

### Prechod nulou druhej derivácie

Metóda detekcie hrán hľadaním núl druhej derivácie je založený na fakte, že 'schodová' funkcia zodpovedá veľkej zmene prvej derivácie a táto prvá derivácia bude mať extrém na mieste hrany. Tým pádom druhá derivácia bude nulová na mieste hrany. Hľadanie nuly je navyše jednoduchšie ako hľadanie extrému. Idea je nasledovná. Obráz sa najskôr filtruje Gaussovským filtrom



Obr. 3: Sonka, Hlavac, Boyle: Image Processing, Analysis and Machine Vision

$$G(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},$$

následne sa nájde druhá derivácia výsledného obrazu pomocou Laplaciánu.

$$\nabla^2[G(x, y, \sigma) * f(x, y)]$$

Posledný výraz sa vďaka vlastnostiam konvolúcie dá prepísať do tvaru

$$[\nabla^2 G(x, y, \sigma)] * f(x, y)$$

Výraz  $\nabla^2 G(x, y, \sigma)$  sa nazýva Laplacián Gaussiánu, ktorý sa dá spočítať analyticky a je rovný

$$\nabla^2 G(x, y, \sigma) = \left( \frac{x^2 + y^2 - \sigma^2}{\sigma^4} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Ako konvolučné jadro teda môžeme vziať

$$h(x, y) = c \left( \frac{x^2 + y^2 - \sigma^2}{\sigma^4} \right) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}}$$

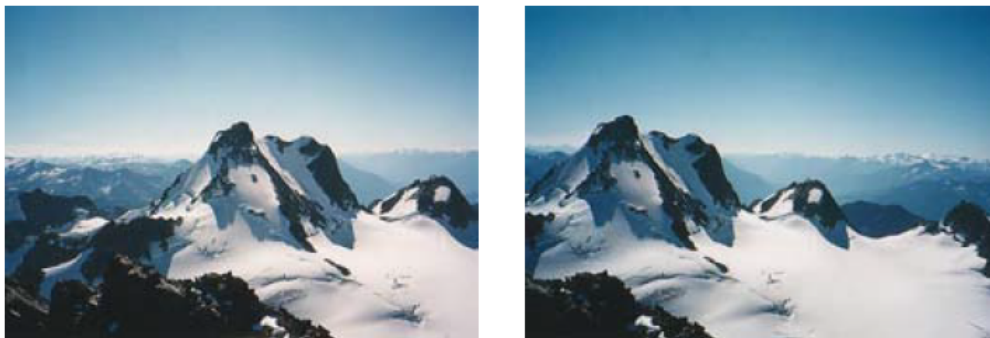
kde  $c$  je konštanta taká, ktorá normalizuje súčet prvkov konvolučného jadra do 0.

Príklad  $5 \times 5$  konvolučného jadra reprezentujúceho Laplacián Gaussiánu je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 16 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ďalší problém je nájdenie núl. Pri diskkrétnej obrazovej funkcii sa vyššie uvedeným postupom len zriedka objaví 0 na mieste hrany. Jednoduchá idea pre riešenie tohto problému je hľadanie malých  $2 \times 2$  okolí, v ktorých nastáva zmena znamienka. Ďalšia možnosť vylepšenia je brať ako body hrany tie pixely, v ktorých má prvá derivácia vysokú odozvu.

## Detektor rohov



Obr. 4: Szeliski: Computer Vision: Algorithms and Applications

Klasická aplikácia počítačového videnia je automatická tvorba panorám. Tá pozostáva z niekoľkých krokov, ktoré vo veľmi zjednodušenej forme sú:

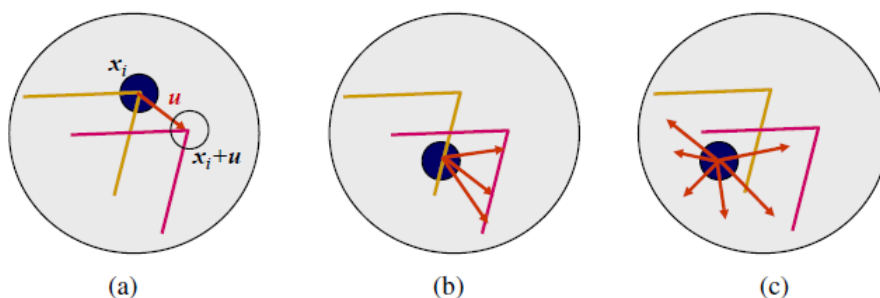
1. Nájdenie význačných bodov v obrazoch (detektor) a ich opis na základe okolia (deskriptor).
2. Spárovanie zodpovedajúcich si význačných bodov.

3. Geometrická transformácia obrazov.

4. Pospájanie/prekrytie – výsledná panoráma.

Budeme sa najskôr venovať prvému bodu.

Jedna z možných definícií rohu je, že roh je pixel, v ktorého okolí sú dve hrany s dominantnými a rôznymi smermi. V takom prípade sa prípadná zmena pozície rohu dá 'ľahko' identifikovať a príslušné rohy spárovať.



Obr. 5: Szeliski: Computer Vision: Algorithms and Applications

Na zistenie, či daný pixel je rohom môžeme použiť úvahu, že pri malom posunutí  $(\Delta x, \Delta y)$  okolia  $W$  daného pixela v obraze  $f$  bude celková zmena v obraze v tomto okolí dostatočne veľká. Na zmeranie tejto zmeny použijeme súčet štvorcov rozdielov

$$S_W(\Delta x, \Delta y) = \sum_{x_i \in W} \sum_{y_i \in W} (f(x_i, y_i) - f(x_i - \Delta x, y_i - \Delta y))^2$$

Aproximujme posunutý obraz  $f(x_i - \Delta x, y_i - \Delta y)$  Taylorovým polinómom prvého rádu

$$f(x_i - \Delta x, y_i - \Delta y) \approx f(x_i, y_i) + \left( \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Po dosadení do  $S_W$  a úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \sum_{x_i \in W} \sum_{y_i \in W} \left( f(x_i, y_i) - f(x_i, y_i) - \left( \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right)^2 \\ &= \sum_{x_i \in W} \sum_{y_i \in W} \left( \left( \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right)^2 \\ &= \sum_{x_i \in W} \sum_{y_i \in W} (\Delta x, \Delta y) \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &= (\Delta x, \Delta y) A_W(x, y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Kde matica  $A_W(x, y)$  nazývaná tiež Harrisova alebo tiež auto korelačná matica je matica

$$A_W(x, y) = \begin{pmatrix} \sum_{x_i \in W} \sum_{y_i \in W} \left( \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} \right)^2 & \sum_{x_i \in W} \sum_{y_i \in W} \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \\ \sum_{x_i \in W} \sum_{y_i \in W} \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} & \sum_{x_i \in W} \sum_{y_i \in W} \left( \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \right)^2 \end{pmatrix}$$

Vlastné čísla tejto matice potom určujú mieru zmeny v príslušných hlavných smeroch určených vlastnými vektormi. Ak sú obe dostatočne veľké, značí to, že daný bod je možné označiť ako roh. Namiesto počítania vlastných hodnôt Harris a Stephens navrhli funkciu odozvy

$$R(A) = \det(A) - \alpha \text{trace}(A)^2 = \lambda_0 \lambda_1 - \alpha (\lambda_0 + \lambda_1)^2.$$

$\alpha$  je parameter, ktorý sa zvyčajne volí ako 0.06. Iné funkcie odozvy sú tiež možné, napr. Brown, Szeliski, Winder

$$R(A) = \frac{\det(A)}{\text{trace}(A)}$$

Maximá tejto funkcie určujú rohy.