Na začiatku 19. storoča Joseph Fourrier vo svojom veľkom diele o riešení rovnice vedenia tepla v tuhých telesách, Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides (Treatise on the propagation of heat in solid bodies), použil na hľadanie riešení rovnice tigonometrické rady. Dosiahnuté výsledky a ďalší výskum ho viedli k tvrdeniu, že každá funkcia sa dá reprezentovať trigonometrickým radom. Neskôr sa však ukázalo, že to nie je celkom pravda. Napriek tomu dnes tento špeciálny trigonometrický rad nesie jeho meno.

Na začiatok zopakujme čo je Fourierov rad funkcie. Zapíšeme ho v tvare, s ktorým ste sa už pravdepodobne stretli. Uvedieme tiež niektoré jeho vlastnosti.

Definícia 1 *Nech s(x) je reálna funkcia reálnej premennej integrovateľná na intervale* $[x_0, x_0+T]$. *Fourierov rad funkcie* s *je funkcionálny rad*

$$s_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{T}, \tag{1}$$

pričom

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} s(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}dx, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} s(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}dx$$

Rad (1) je navyše možné zapísať niekoľkými ekvivalentnými spôsobmi

$$s_F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\frac{2\pi nx}{T} + \Phi_n), \tag{2}$$

$$s_F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{2\pi nx}{T}}, \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} s(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}dx \tag{3}$$

Medzi koeficientami jednotlivých verzií Fourierovho radu existujú relatívne jednoduché vzťahy. Zvlášť zaujímavý je rad (3) v ktorom vystupuje súčet komplexných čísel a koeficienty c_n je možné spočítať ako

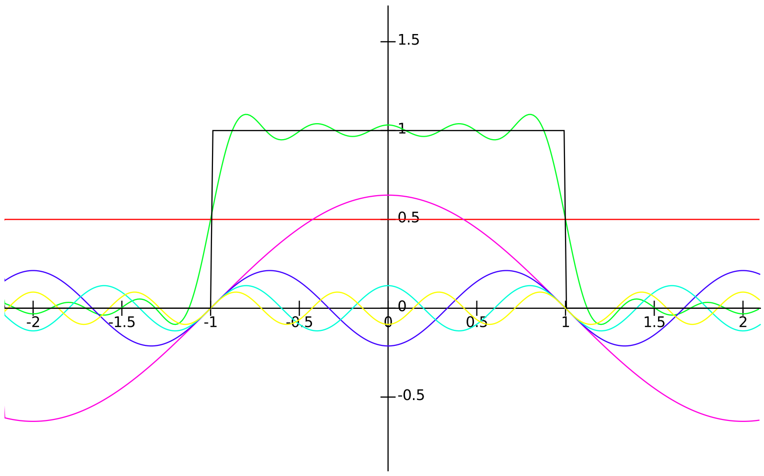
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} s(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}dx. \tag{4}$$

Samozrejme na mieste je otázka, či Fourierov rad s_F danej funkcie s k tejto funkcii s aj konverguje. Pre úplnosť zopakujme príslušné tvrdenia o konvergencii.

Veta 1 *Nech s a s' sú po častiach spojité na intervale $[x_0, x_0 + T]$ a T periodické na $\mathbb{R}$. Potom Fourierov rad funkcie s konverguje v bode x k hodnote*

$$\left[\lim_{t \to x^+} s(t) + \lim_{t \to x^-} s(t)\right] / \, 2$$

Tým pádom rovnosť (1) hovorí, že vhodné funkcie (napr. spojité, T-periodické) môžeme považovať za súčet funkcií sínus a kosínus s rôznymi váhami, inými slovami, sínus a kosínus tvoria bázu vektorového priestoru vhodných funkcii nad poľom reálnych čísel. Na obrázku je ukážka grafu funkcie (signálu) obdĺžnikového tvaru s periódou 4 a niekoľko prvých bázových funkcií.



Obr. 1: Pôvodná funkcia – čierna, súčet prvých deviatich členov jej Fourierovho radu – zelená, prvých sedem členov Fourierovho radu – rôzne farby

Peknú geometrickú reprezentáciu Fourierovho radu dostaneme, ak porozmýšľame, čo vyjadruje rad (3). Ak umožníme koeficientom c_n nadobúdať ľubovoľné, aj komplexné hodnoty, celý súčet bude ležať v komplexnej rovine. Výraz $e^{i\frac{2\pi nx}{T}}$ opisuje v komplexnej rovine pohyb bodu (komplexného čísla) po jednotkovej kružnici (uhlová rýchlosť). Reálny koeficient c_n určuje polomer tejto kružnice (amplitúdu). V prípade, že c_n je komplexné, $|c_n|$ určuje polomer a $\arg(c_n)$ počiatočnú polohu bodu na kružnici (počiatočnú fázu). Súčet znamená pospájanie týchto kružníc. Niekoľko obrázkov nižšie ukazuje príklady takýchto rozkladov na kružnice. Extrémny prípad si môžete pozrieť na youtube.

Tvar (2) nám hovorí, že na opis T-periodickej funkcie nám stačí poznať amplitúdy A_n a fázy Φ_n. Ak tieto hodnoty poznáme vieme zrekonštruovať danú funkciu pomocou bázových funkcii. Čo však v prípade, že určená funkcia nie je periodická? Myšlienku riešenia tohoto problému si uvedieme na konkrétnom príklade.

Vezmime funkciu obdĺžnikového tvaru, čiže napr.

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

a počítajme c_n pre komplexný tvar Fourieroveho radu v trochu inej forme.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(x) e^{-i\frac{2\pi n x}{T}} dx$$

Z toho by malo byť vidno, že ak integrál vpravo je rovnomerne ohraničený pre každé n, c_n bude malé pre dostatočne veľké T. Preto miesto toho budeme počítať Tc_n. Vcelku jednoducho sa spočíta, že

$$Tc_n = \frac{\sin(2\pi n/T)}{\pi n/T}$$

Teraz si uvedomíme, že n/T určuje frekvenciu v bázových funkciách. n vzorkuje frekvencie medzi 0 a T. Pokiaľ T rastie, n/T počíta stále viac frekvencii, ktoré postupne vyplnia celé kontinuum, ak $T \to \infty$. Ak označíme $n/T = \xi$, po limitnom prechode dostaneme

$$Tc_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

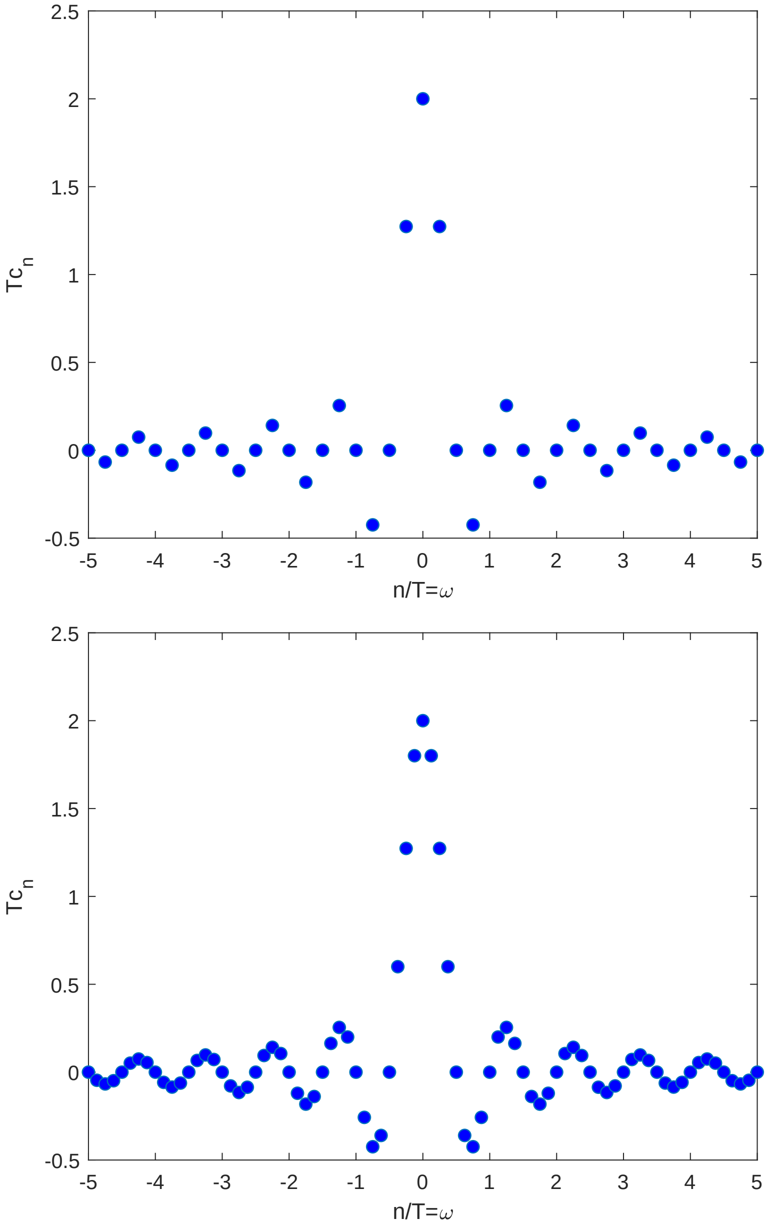
čo je funkcia ξ, čiže frekvencie (pozri obr. 2 a 3 nižšie). A túto funkciu nazveme Fourierovou transformáciou funkcie $s(x)$ a značíme $S(\xi)$, resp. $\mathcal{F}[s](\xi)$.

Definícia 2 *Spojitá Fourierova transformácia funkcie $s(x)$ je integrálna transformácia*

$$\mathcal{F}[s](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-2\pi i \xi x} dx. \tag{5}$$

Keďže integrál (5) je nevlastný, bude užitočné poznať podmienky jeho konvergencie. Tie sú nasledovné

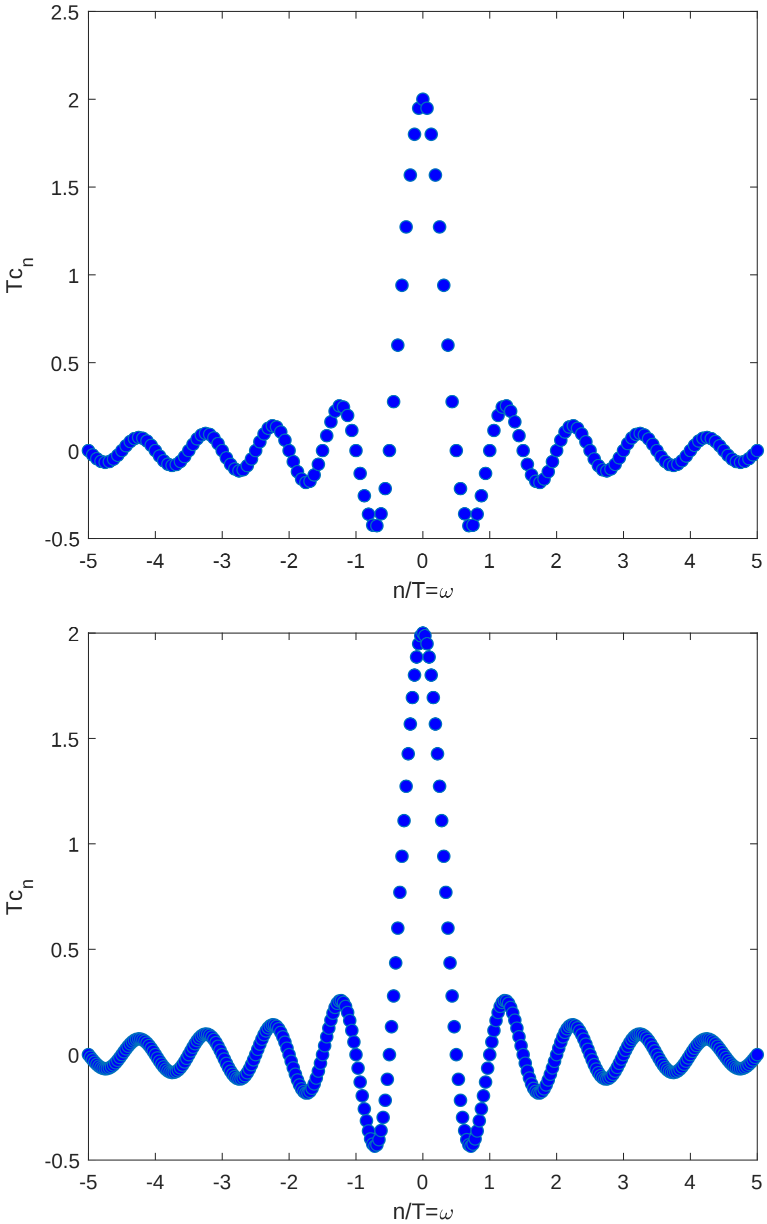
1. $\int_{-\infty}^{\infty} |s(x)| dx < \infty$,
2. Funkcia s má na každom ohraničenom intervale len konečne veľa bodov nespojitosti.



Obr. 2: Graf Tc_n pre $T = 4$ – hore a $T = 8$ – dole pre obdĺžnikovú funkciu.

Pre praktické počítanie sú obrazy štandardných funkcii pri Fourierovej transformácii a rôznych operácii tabelované.

Z hľadiska teórie spracovania signálu Fourierova transformácia transformuje funkciu f – signál z priestorovej oblasti, kde v grafe funkcie f x-ová os určuje bod a $f(x)$ hodnotu funkcie, do frekvenčnej oblasti $F(\xi)$, kde x-ová



Obr. 3: Graf Tc_n pre $T = 16$ – hore a $T = 32$ – dole pre obdĺžnikovú funkciu.

os reprezentuje frekvenciu ξ a $F(\xi)$ reprezentuje "množstvo" danej frekvencie v signále. Funkciu $F(\xi)$ voláme tiež frekvenčné spektrum funkcie f. Pozor, Fourierova transformácia funkcie f je vo všeobecnosti komplexná funkcia $F(\xi) = \Re(F(\xi)) + i\Im(F(\xi))$. Pretože z objektívnych dôvodov sa komplexné funkcie zle vizualizujú, na ich zobrazenie sa používajú odvodené spektrá

1. Amplitúdové spektrum: $|F(\xi)| = \sqrt{\Re(F(\xi))^2 + \Im(F(\xi))^2}$,
2. Fázové spektrum: $\arctan(\Im(F(\xi))/\Re(F(\xi)))$
3. Výkonové spektrum: $P(\xi) = |F(\xi)|^2$.

Ďalší pojem súvisiaci s frekvenčným spektrom je šírka (frekvenčného) pásma funkcie (signálu), čo je najmenší interval frekvencií vo frekvenčnom (amplitúdovom) spektre obsahujúci frekvencie s nenulovou amplitúdou. Keďže väčšina signálov je neperiodických a tieto môžu obsahovať periodický signál lubovoľne veľkej frekvencie, zvyčajne sa určí hranica, od ktorej amplitúdu daného periodického signálu považujeme za nulovú a šírka pásma je potom interval obsahujúci frekvencie periodických signálov, s amplitúdov väčšou ako daná hranica. Ak $F(\omega)$ je frekvenčné spektrum funkcie f, inverzná Fourierova transformácia je daná predpisom

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

Za vhodných podmienok je možné z frekvenčného spektra zrekonštruovať pôvodnú funkciu.

Použitie Fourierovej transformácie

Asi najznámejšie aplikácia Fourierovej transformácie je filtrovanie vo frekvenčnej oblasti. Signál získaný z určitého zariadenia obsahuje okrem požadovanej informácie aj napríklad šum. Tento sa vo frekvenčnom spektre môže objaviť ako signál dosť vysokej frekvencie. Idea je teda previesť signál do frekvenčnej oblasti, v nej utlmiť nevhodné frekvencie a transformovať takto pozmenené frekvenčné spektrum späť na signál. Takáto operácia, pri ktorej potláčame, prípadne zvýrazňujeme vhodné frekvencie sa nazýva filtrácia. Zvyčajný postup je zostrojenie funkcie G vo frekvenčnej oblasti, nazývanej filter tak, aby sme po transformácii násobením $F(\xi)G(\xi)$ dostali požadovaný tvar frekvenčného spektra

Podľa toho, aké frekvencie utlmujú delíme filtre na dolnú (low-pass), hornú (hi-pass) a pásmovú (band-pass) priepust. Z názvu by malo byť zrejmé, čo dané filtre robia. Napríklad vyššie uvedená obdĺžniková funkcie môže vo frekvenčnom spektre slúžiť ako dolná priepust, keďže po vynásobení s pôvodným signálom vo frekvenčnom spektre budú všetky frekvencie mimo intervalu $[-1, 1]$ nulové.

Ak by sme počítali inverznú transformáciu pre spektrum $F(\xi)G(\xi)$, dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)G(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(x - \tau) d\tau$$

Pravá strana je tzv. konvolúcia $f * g$ funkcii f a g, čiže

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau)d\tau$$

a pre Fourierovu transformáciu konvolúcie platí

$$\mathcal{F}[f * g] = F(\xi)G(\xi)$$

kde F a G sú frekvenčné spektrá funkcií f a g. Niektoré ďalšie užitočné vlastnosti Fourierovej transformácie sú

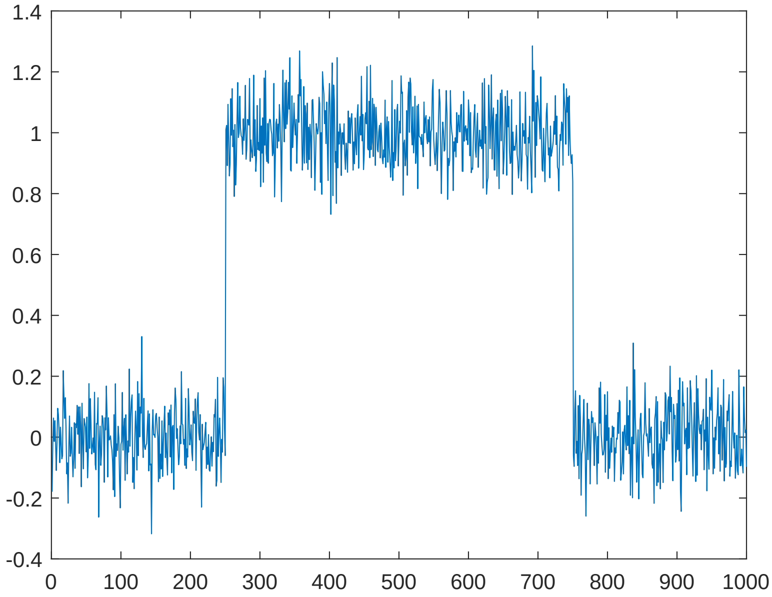
- Lineárnosť

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$$

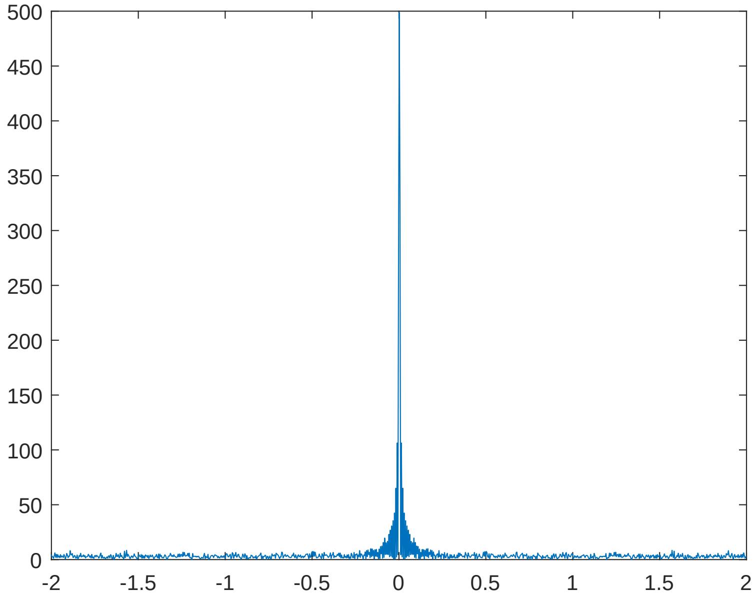
- Súčin funkcií

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$$

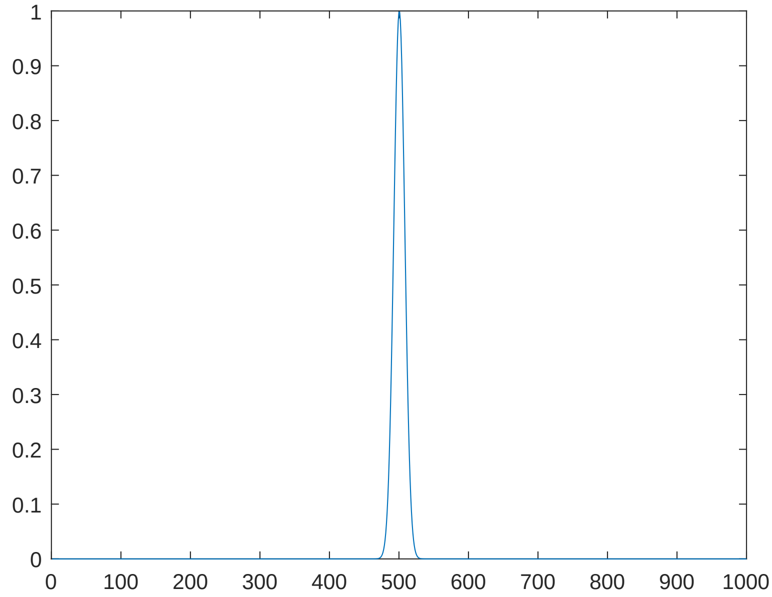
Čiže súčinu funkcií zodpovedá konvolúcia frekvenčných spektier a naopak, súčinu frekvenčných spektier zodpovedá konvolúcia príslušných funkcií.



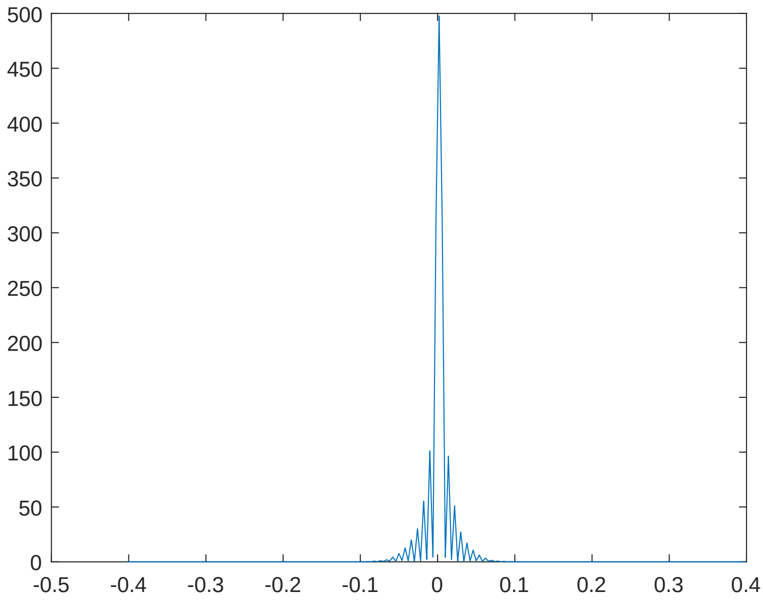
Obr. 4: Obdĺžniková funkcia s šumom



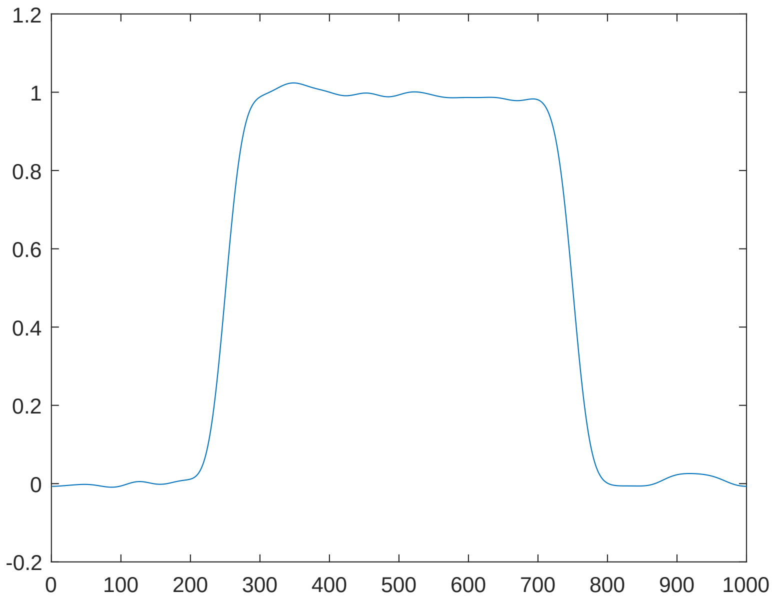
Obr. 5: Frekvenčné spektrum predošlej funkcie



Obr. 6: Dolnopriepustný filter - gaussovský $e^{-a\xi^2}$



Obr. 7: Potlačené vysoké frekvencie



Obr. 8: Odfiltrovaný šum

2D Fourierova transformácia

Ztiaľ sme hovorili o Fourierovej transformácii v jednom rozmere. Tento pojem je jednoduchým spôsobom rozšíriteľný aj do roviny

Definícia 3 *Fourierova transformácia reálnej funkcie $f(x, y)$ dvoch premenných je funkcia*

$$F(u, v) = \mathcal{F}[f](u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(xu+yv)} dx\, dy$$

Inverzná Fourierova transformácia je

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(xu+yv)} dx\, dy$$

Táto má podobné vlastnosti ako 1D Fourierova transformácia.

Digitalizácia

Jedna zo základných funkcií, ktorá vlastne nie je ani funkciou v štandardnom slova zmysle je Diracova delta funkcia $\delta(x)$, ktorá je definovaná vlastnosťami

$\delta(x) = 0$ pre $x \neq 0$ a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Zjavne žiadna funkcia ktorá by spĺňala uvedené podmienky nemôže existovať. Tejto "funkcii" sa však dá dať zmysel zavedením pojmu zovšeobecnenej funkcie (tiež distribúcie), to by nás ale odviedlo príliš ďaleko od témy. Ďalšia pekná vlastnosť delta funkcie je tzv. sifting property

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a).$$

Diracova delta funkcia slúži v teórii spracovania signálov ako ideálny impulz a hrá veľkú úlohu pri samplovaní a vysvetlení problémov spojených so samplovaním.