***Problems***

Termín na odovzdanie riešení je 3. január 2020. Riešenia posielajte na cvisionfmfi@gmail.com.

1) [5 bodov] Pre dané dva obrazy nájdite fundamentálnu maticu a príslušný pár matíc kamier. Použite normalizovaný 8-bodový algoritmus.

2) [8 bodov] Nájdite body $\mathbf{X}$ priestoru, ktoré sa maticami kamier zobrazia na príslušný pár bodov $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$.

Návod:

1. Pre $n \geq 8$ zodpovedajúcich si párov bodov $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$ nájdite fundamenálnu maticu
   (a) **Normalizácia:** Nádite centroid množiny bodov $C = 1/n \sum_n \mathbf{x}_i = (c_1, c_2)^T$ a transláciu $T_t$, ktorá posunie body tak, aby $C$ bol stredom súradnicovej sústavy. Nájdite škálovanie $T_s$ tak, aby priemerná hodnota vzdialeností bodov $x_i$ od centroidu bola $\sqrt{2}$. Zostrojte $T_t$ a $T_s$ ako $3 \times 3$ matice. Výsledná transformácia, ktorá normalizuje body $\mathbf{x}_i$ je $T = T_s T_t$. Podobne nájdite $T'$ ktorá normalizuje body $\mathbf{x}'_i$.

   (b) Pre normalizované páry bodov $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$, $\mathbf{x} = (x, y, 1)$, $\mathbf{x}' = (x', y', 1)$ vytvorte maticu $A$, kde každý riadok zodpovedá jednému páru bodov a pre príslušný pár má daný riadok tvar

   $$(x'x, x'y, x', y'x, y'y, x', x, y, 1).$$

   Nájdite nenulový vektor $\mathbf{f}$ ktorý je riešením homogénneh systému $A\mathbf{f} = 0$ metódou najmenších štvorcov. Vektor $\mathbf{f}$ obsahuje prvky fundamentálnej matice $F$ po riadkoch.

   (c) **Vynútenie singulárnosti:** $F = UDV^T$. Najmenšiu singulárnu hodnotu v $D$ zmeniť na 0. $\hat{F} = U\hat{D}V^T$.

   (d) **Denormalizácia:** Hľadaná fundamentálna matica pre pôvodné dvojice bodov je $F = T'^T \hat{F} T$.

2. Pre pár $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ nameraných bodov a fundamentálnu maticu $F$ nájsť pár $\hat{\mathbf{x}} \leftrightarrow \hat{\mathbf{x}'}$ ktorý minimalizuje geometrickú chybu za podmienky $\hat{\mathbf{x}'}^T F \hat{\mathbf{x}} = 0$.

   (a) Definujte transformačné matice (translácie) $T$ a $T'$ tak aby po transformácii mali body $\mathbf{x} = (x, y, 1)$ a $\mathbf{x}' = (x', y', 1)$ súradnice $(0, 0, 1)$.

   (b) Transformujte $F$ na $T'^{-T} F T^{-1}$.

   (c) Nájdite ľavý a pravý epipól $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)^T$ a $\mathbf{e}' = (e'_1, e'_2, e'_3)^T$ tak, že $\mathbf{e}'^T F = \mathbf{0}$ a $F\mathbf{e} = \mathbf{0}$ a normalizujte ich tak, aby $\mathbf{e}^2 + \mathbf{e}'^2 = 1$.

   (d) Vytvorte matice rotácii

   $$R = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & 0 \\ -e_2 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R' = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & 0 \\ -e'_2 & e'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (e) Transformujte $F$ ako $R' F R^T$.

   (f) Položte $f = e_3$, $f' = e'_3$, $a$, $b$, $c$, $d$ ako prvky matice z prednášky.

   (g) Nájdite korene polynómu $g(t)$ z prednášky a hodnotu $s(t)$ pre $t = \infty$. Nájdite hodnotu $t_{min}$ globálneho minima funkcie $s(t)$.

   $$g(t) = t((at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2)^2 - (ad - bc)(1 + f^2t^2)^2(at + b)(ct + d)$$

   $$s(t) = \frac{t^2}{1 + f^2t^2} + \frac{(ct + d)^2}{(at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2}$$

   (h) Nájdite extremálne epipolárne priamky $\mathbf{l} = (tf, 1, -t)$ a $\mathbf{l}' = F(0, t, 1)^T$. Na týchto priamkach zvoľte bod najbližšie k počiatku súr. sús. Pre všeobecnú priamku $(\lambda, \mu, \nu)$ tento bod je $(-\lambda\nu, -\mu\nu, \lambda^2 + \mu^2)$.

(i) Transformujte takto získané body späť transformáciami $T^{-1}R^T$ a príslušnými čiarkovanými.

(j) Nájdite bod $\mathbf{X}$ trianguláciou.

3. **Triangulácia:** Homogénne súradnice bodu $\mathbf{X}$ pre pár $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ taký že $P\mathbf{X} = \mathbf{x}$ a $P'\mathbf{X} = \mathbf{x}'$ sú riešením systému $A\mathbf{X} = 0$, kde

$$A = \begin{pmatrix} x\mathbf{p}^{3T} - \mathbf{p}^{1T} \\ y\mathbf{p}^{3T} - \mathbf{p}^{2T} \\ x'\mathbf{p}'^{3T} - \mathbf{p}'^{1T} \\ y'\mathbf{p}'^{3T} - \mathbf{p}'^{1T} \end{pmatrix}$$

pričom $\mathbf{p}^{iT}$ označuje $i$-ty riadok matice $P$ a $\mathbf{p}'^{iT}$ označuje $i$-ty riadok matice $P'$.