

0.1 Motivácia

Parciálne diferenciálne rovnice sú rovnice, v ktorých je neznámou funkcia viacerých premenných, a táto funkcia sa v rovnici vyskytuje v parciálnej derivácii. Ako príklad môžeme uviesť rovnicu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

s neznámou funkciou $u = u(x, t)$ dvoch premenných x a t .

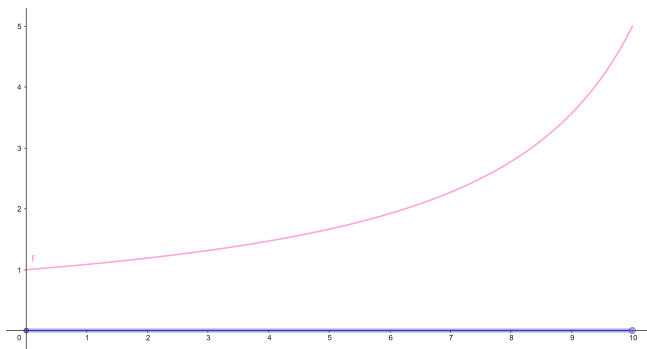
Parciálne diferenciálne rovnice majú veľké využitie pri modelovaní mnohých fyzikálnych dejov napríklad v akustike, geofyzike, kvantovej mechanike, aerodynamike a ďalších technických a fyzikálnych oblastiach (obrázky, príklady, animácie?).

V tomto kurze si predstavíme a odvodíme niektoré špeciálne typy parciálnych diferenciálnych rovníc. Ukážeme si, ako v niektorých prípadoch nájsť analytické riešenie. Predstavíme si tiež niektoré numerické metódy, ktoré umožňujú využitie výpočtovej techniky pri hľadaní riešení parciálnych diferenciálnych rovníc.

Ako prvý konkrétny typ parciálnej diferenciálnej rovnice si predstavíme rovnicu vedenia tepla, ktorú si navyše odvodíme z niekoľkých fyzikálnych princípov.

0.2 Rovnica vedenia tepla

Majme homogénnu tyč konštantného prierezu, ktorá bola zohriata tak, že distribúcia teploty na tyči zodpovedá priebehu grafu na obrázku 1.



Obr. 1: Rozloženie teploty (červená krivka) na homogénnej tyči konštantného prierezu (modrá úsečka).

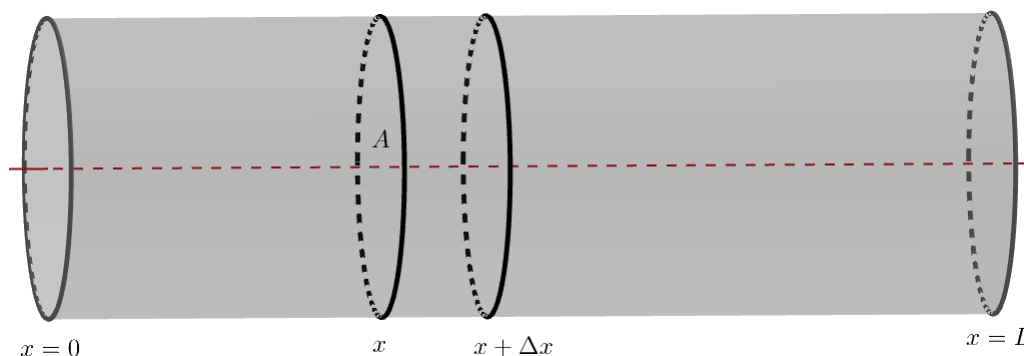
Počiatkové rozloženie teploty zodpovedá funkcii $u(x, 0) = f(x)$. To čo nás zaujíma je vývoj teploty v čase $u(x, t)$.

To ako bude vývoj teploty vyzeráť zrejme závisí od mnohých ďalších podmienok. Iný bude ak celá tyč bude tepelne izolovaná a iný ak je umožnený únik tepla do okolia. Pre jednoduchosť uvažujme že celá tyč je izolovaná, čiže žiadne teplo neuniká do okolia. Ak si spomenieme na fyzikálny princíp, že teplo prechádza z teplejších telies na chladnejšie a čím je rozdiel teplôt vyšší, tým rýchlejšie sa teplo prenáša, ľahko si uvedomíme, že zmena teploty v čase bude zrejme nejako závisieť od rozloženia teploty a jej lokálnych zmien. Tým pádom ak $u(x, t)$ je teplota v čase t , vieme, že $\frac{\partial u}{\partial t}$ nejako závisí od $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Po tomto neformálnom rozbere sa pustíme do konkrétneho odvodenia rovnice určujúcej vyššie spomínaný vzťah. Keďže teplota je prejavom tepla a teplo je vlastne forma energie, budeme najskôr pracovať s energiou.

Uvažujme tyč konštantného prierezu s obsahom A a dĺžkou L , ktorá je orientovaná v smere osi x . Predpokladajme, že v danom priereze sú všetky tepelné vlastnosti tyče rovnaké, čiže tyč sa správa ako jednorozmerný objekt. Taktiež tepelne izolujme plášť uvažovanej tyče, čím zabránime úniku tepla cez plášť.

Zavedme pojem hustoty tepelnej energie. **Hustota tepelnej energie** $e(x, t)$ je množstvo tepelnej energie na jednotku objemu. Môžeme si všimnúť, že hustota tepelnej energie závisí od x a t .



Obr. 2: Tyč a vyznačený úsek.

Ak zvolíme na tyči úsek medzi x a $x + \Delta x$ a ak na tomto úseku je hustota tepelnej energie konštantná, množstvo tepelnej energie v tomto úseku bude súčinom objemu tohoto úseku a hustoty tepelnej energie na tomto úseku. V prípade, že hustota tepelnej energie nie je konštantná, môžeme zvoliť dostatočne krátky úsek. V tom prípade dostaneme približne hodnotu tepelnej

energie v danom úseku ako

$$\text{tepelná energia} \approx e(x, t) A \Delta x \quad (1)$$

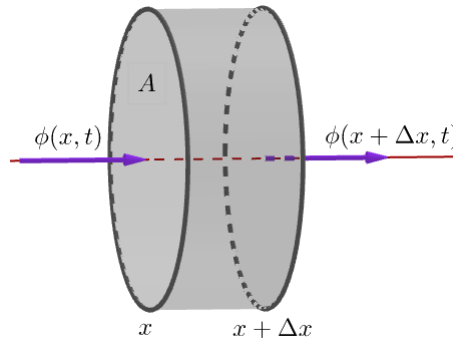
Pozrime sa, ako sa v danom úseku môže zmeniť energia v čase. Plášť sme zaizolovali, takže energia sa môže zmeniť len cez krajné podstavy x a $x + \Delta x$ alebo vďaka nejakému vnútornému zdroju energie. Potom miera zmeny tepelnej energie v danom úseku za jednotku času je súčtom energie, ktorá pritečie a odtečie cez krajné podstavy za jednotku času a príspevku energie z vnútorného zdroja za jednotku času.

Zmena tepelnej energie v čase pre dostatočne malý úsek je z (1)

$$\frac{\partial}{\partial t} [e(x, t) A \Delta x] \quad (2)$$

Formalizujme teraz jednotlivé príspevky ku zmene celkovej tepelnej energie. K tomu si najskôr zadefinujeme pojem tepelného toku.

Tepelný tok $\phi(x, t)$ je množstvo energie ktoré prejde jednotkovou plochou v jednom smere za jednotku času. Pre naše účely zavedieme nasledovnú



Obr. 3: Tok energie cez úsek tyče

konvenciu. Tepelný tok bude kladný, práve vtedy keď energia prúdi v kladnom smere osi x (štandardne zľava doprava), v opačnom prípade bude tok záporný. Potom celková tepelná energia, ktorá pretečie cez okraje tenkého úseku za jednotku času bude

$$\phi(x, t) A - \phi(x + \Delta x, t) A$$

Do celkovej zmeny energie môžu ešte prispievať vnútorné zdroje, ktoré súhrnne označíme ako funkciu $Q(x, t)$ a bude to množstvo vygenerovanej tepelnej energie na jednotku objemu za jednotku času.

Celková zmena tepelnej energie je teda

$$\frac{\partial}{\partial t}[e(x, t)A\Delta x] \approx \phi(x, t)A - \phi(x + \Delta x, t)A + Q(x, t)A\Delta x \quad (3)$$

Ak predpokladáme, že pre $\Delta x \rightarrow 0$ chyba aproximácie (3) konverguje k 0, dostaneme vydelením $A\Delta x$ a limitným prechodom

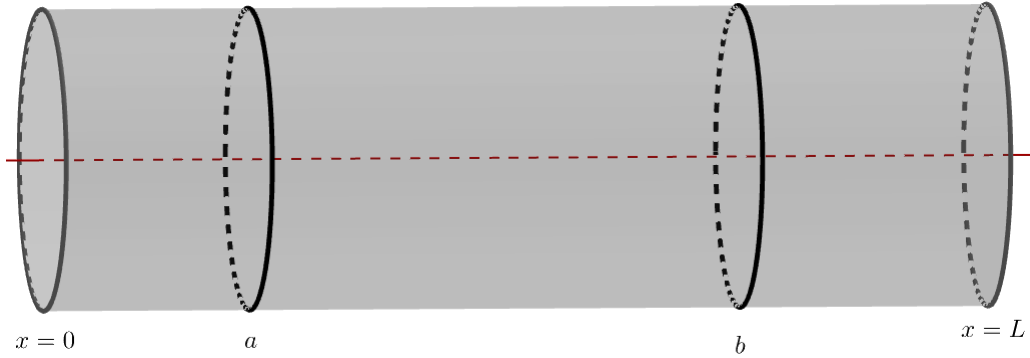
$$\frac{\partial e}{\partial t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x, t) - \phi(x + \Delta x, t)}{\Delta x} + Q(x, t).$$

Limita na pravej strane je presne parciálna derivácia $-\phi$ podľa x , takže dostávame

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q(x, t) \quad (4)$$

Pri tomto postupe máme samozrejme problém, že o chybe aproximácie v podstate nič nevieme. Tento nedostatok je možné obísť trochu iným postupom.

Namiesto malého úseku tyče medzi x a $x + \Delta x$ vezmeme úsek ľubovoľnej konečnej dĺžky od a po b .



Obr. 4: Ľubovoľný úsek

Ak $e(x, t)$ je funkcia hustoty energie na tyči, celková tepelná energia vo zvolenom úseku (a, b) bude

$$\int_a^b e(x, t)A \, dx.$$

Toto je už funkcia závislá len od t a zmena celkovej energie v úseku sa spočíta podobne ako v prípade malého úseku vyššie. Bude to súčet celkového toku na okrajoch a príspevku z vnútorných zdrojov, čiže

$$\frac{d}{dt} \int_a^b e(x, t)A \, dx = \phi(a, t)A - \phi(b, t)A + \int_a^b Q(x, t)A \, dx$$

resp. po vydelení A

$$\frac{d}{dt} \int_a^b e(x, t) dx = \phi(a, t) - \phi(b, t) + \int_a^b Q(x, t) dx \quad (5)$$

Zo známých vzťahov z analýzy máme pre spojitú $e(x, t)$ a konštantné a a b

$$\frac{d}{dt} \int_a^b e(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} e(x, t) dx$$

a pre spojitú diferencovateľnú $\phi(x, t)$

$$\phi(a, t) - \phi(b, t) = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t) dx$$

Dosadením do (5) a presunom všetkého na jednu stranu dostaneme

$$\int_a^b \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - Q \right) dx = 0$$

Keďže tento integrál musí byť nulový pre ľubovoľnú voľbu úseku (a, b) , pomerne jednoduchým argumentom dostaneme, že integrand musí byť nulový, čo po drobnej úprave dáva presne rovnicu (4)

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q(x, t)$$

Získali sme teda rovnicu, ktorá ale udáva vzťah medzi hustotou tepelnej energie a tepelným tokom. My by sme však potrebovali rovnicu obsahujúcu ako neznámu funkciu teploty. Otázka teda znie, či existuje nejaký vzťah medzi teplotou $u(x, t)$ a hustotou $e(x, t)$ a tokom $\phi(x, t)$.

V prípade hustoty tepelnej energie toto spojivo je tepelná kapacita. **Tepelná kapacita** c je množstvo tepelnej energie ktoré treba dodať jednotke hmotnosti materiálu, aby jeho teplota stúpala o jednotku. Tepelná kapacita vo všeobecnosti závisí od teploty materiálu. Pokiaľ však rozsah teplôt nie je príliš veľký, môžeme tepelnú kapacitu považovať za nezávislú od teploty. V našom modeli budeme ešte navyše požadovať, že tyč môže byť zložená z rôznych materiálov a vtom prípade tepelná kapacita bude funkciou x , čiže $c = c(x)$. Veľmi často však budeme počítať s tyčou z jedného materiálu. V tom prípade tepelná kapacita c bude konštantná.

Už vieme, že množstvo tepelnej energie v tenkom reze je (zhruba) $e(x, t)A\Delta x$. Na druhej strane je to tiež množstvo tepelnej energie, ktoré je treba dodať rezu, aby sa ohrial z referenčnej teploty 0° na požadovanú teplotu $u(x, t)$.

Potom množstvo tepelnej energie na jednotku hmotnosti je $c(x)u(x, t)$. Na určenie hmotnosti úseku tyče použijeme hustotu materiálu $\rho(x)$, ktorú budeme považovať za funkciu závislú od x v prípade tyče zloženej z nehomogénneho materiálu. Potom celková hmotnosť úseku je $\rho(x)A\Delta x$ a celková tepelná energia v tenkom reze je $c(x)u(x, t)\rho(x)A\Delta x$. Takže dostávame

$$e(x, t)A\Delta x = c(x)u(x, t)\rho(x)A\Delta x$$

a po zjednodušení získame

$$e(x, t) = c(x)u(x, t)\rho(x).$$

Takto vyjadrenú hustotu tepelnej energie môžeme dosadiť do rovnice (4), čím získame

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q. \quad (6)$$

Ostáva nahradiť vhodným spôsobom tepelný tok. Na to využijeme vzťah pochádzajúci od Fouriera, ktorým formalizoval nasledujúce kvalitatívne vlastnosti tepelného toku:

1. Ak je teplota v nejakej oblasti konštantná tepelný tok je nulový.
2. Pri rozdielne teplôt prúdi tepelná energia z teplejšej oblasti do chladnejšej
3. Čím vyšší rozdiel teplôt (vzhľadom na jeden materiál), tým vyšší tok tepelnej energie.
4. Tok tepelnej energie je rozdielny pre rôzne materiály aj v prípade rovnakého teplotného rozdielu.

Spomínaný vzťah sa nazýva Fourierov zákon vedenia tepla a má tvar

$$\phi = -K_0\frac{\partial u}{\partial x}. \quad (7)$$

Z tejto rovnice vidíme, že tepelný tok je úmerný zmene teploty. Ak teplota je rastúca funkcia vzhľadom na x , jej parciálna derivácia podľa x je kladná a teplota je väčšia v smere osi x , preto tepelný tok musí byť orientovaný sprava doľava, preto vo vzťahu (7) vystupuje znamienko mínus. Koeficient K_0 nazývame koeficient tepelnej vodivosti a meria schopnosť materiálu viesť teplo. K_0 závisí od konkrétneho materiálu a vo všeobecnosti závisí aj od teploty. Podobne ako v prípade tepelnej kapacity, nebudeme závislosť od teploty brať do úvahy a vo všeobecnosti $K_0 = K_0(x)$ bude funkciou x .

Teraz už môžeme nahradiť aj tepelný tok ϕ v rovnici (6). Tak dostaneme rovnicu vedenia tepla

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q. \quad (8)$$

Zdroje tepla zahrnuté v Q zvyčajne považujeme za známe. V prípade, že ρ , c a K_0 sú konštantné a $Q = 0$, po jednoduchšej úprave dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kde konštanta $k = \frac{K_0}{c\rho}$ sa nazýva koeficient tepelnej difúzie.

Rovnica vedenia tepla s nulovými zdrojmi tepla a konštantnými tepelnými vlastnosťami je rovnica tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9)$$

V prípade obyčajných diferenciálnych rovníc, napríklad pri výpočte dráhy hmotného bodu je potrebné poznať počiatočnú polohu a počiatočnú rýchlosť a príslušná diferenciálna rovnica určí polohu bodu. Podobne v prípade rovnice vedenia tepla potrebujeme poznať začiatočné rozdelenie teploty (zvyčajne v čase $t=0$)

$$u(x, 0) = f(x) \quad (10)$$

keďže v rovnici vedenia tepla vystupuje jedna časová derivácia. Rovnosť (10) nazývame začiatočná podmienka. Samotná začiatočná podmienka ale nestačí na predikciu vývoja teploty. Na to potrebujeme ešte poznať, čo sa deje na koncoch tyče $x = 0$ a $x = L$. Tu existuje niekoľko možností špecifikácie správania sa teploty a tieto podmienky nazývame okrajové podmienky. V rovnici vedenia tepla vystupuje druhá derivácia podľa priestorovej premennej, takže potrebujeme poznať dve podmienky. Tieto určujeme spravidla na koncoch.

Predpísaná teplota Jeden typ okrajovej podmienky je daný predpísaním teploty na okraji v závislosti od času, čiže

$$u(0, t) = u_B(t)$$

určuje správanie teploty v mieste $x = 0$. Podobným spôsobom je možné zadať teplotu aj v $x = L$.

Predpísaný tepelný tok Zodpovedá zadaniu ϕ v (7), čo zodpovedá zadaniu prvej derivácie teploty podľa x v $x = 0$ resp. $x = L$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \phi(t). \quad (11)$$

Nulový tepelný tok na hranici fyzikálne zodpovedá ideálne izolovanému okraju, príslušná podmienka je vtedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0. \quad (12)$$

Newtonov zákon ochladzovania Pre fyzikálne realistickejší scenár kontaktu tyče s odtekajúcou tekutinou nemožno dobre použiť ani predpísanú teplotu ani predpísaný tepelný tok. V takejto situácii odchádzajúce teplo z tyče ohreje tekutinu a táto tekutina prúdením odvedie toto teplo preč. Samozrejme, v blízkosti tyče bude tekutina teplejšia. Ako dobrá aproximácia sa ukazuje závislosť tepelného toku na okraji $x = 0$ a rozdielu teploty tyče a predpísanej teploty vonkajšej teploty v tvare

$$-K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -H[u(0, t) - u_B(t)].$$

Tento vzťah sa nazýva Newtonov zákon ochladzovania (NZO) a koeficient $H \geq 0$ je koeficient prenosu tepla.

Ďalším rozborom možno pre $x = L$ ukázať, že Newtonov zákon ochladzovania bude mať tvar

$$-K_0(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = H[u(L, t) - u_B(t)].$$

Okrajové podmienky možno kombinovať, takže napríklad na jednom okraji môže byť daná predpísaná teplota a na druhom okraji môže byť predpísaný tepelný tok.

Rovnica vedenia tepla

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q.$$

Rovnica vedenia tepla s nulovými zdrojmi tepla a konštantnými tepelnými vlastnosťami

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Začiatočná podmienka

$$u(x, 0) = f(x)$$

Okrajové podmienky

(predpísaná teplota)	$u(0, t) = u_B(t)$
(predpísaný tepelný tok)	$-K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \phi(t)$
(NZO pre $x=0$)	$-K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -H[u(0, t) - u_B(t)]$
(NZO pre $x=L$)	$-K_0(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = H[u(L, t) - u_B(t)]$

Skôr, než sa pustíme do riešenia všeobecnej rovnice vedenia tepla pozrime sa na nasledujúci špeciálny prípad. Predpokladajme, že máme tyč dĺžky L bez vnútorných zdrojov tepla, ktorej konce udržiavame na konštantných teplotách

$$u(0, t) = T_1,$$

$$u(L, t) = T_2.$$

Skúsenosť nám naznačuje, že pri počiatočnom rozložení teploty $u(x, 0) = f(x)$ očakávam, že po dostatočne dlhom čase dôjde k ustáleniu teploty $u(x, t)$. Poďme teda skúsiť nájsť také rozloženie teploty, ktoré sa nebude meniť v čase, čiže $u(x, t) = u(x)$. Takéto riešenie nazývame stacionárne riešenie (t.j. riešenie nezávislé na čase). Keďže potom $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ a u je funkciou len jednej premennej, rovnica vedenia tepla v tomto prípade prejde na tvar

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \tag{13}$$

s okrajovými podmienkami

$$\begin{aligned}u(0) &= T_1, \\ u(L) &= T_2.\end{aligned}$$

Rovnica (13) je obyčajná diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami so všeobecným riešením, ktoré získame, keď túto rovnicu dva krát integrujeme. Dostaneme tak

$$u(x) = c_1x + c_2$$

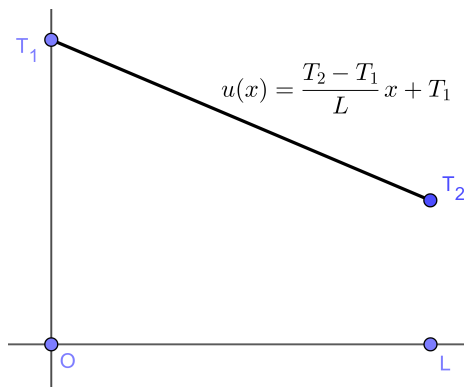
Po aplikácii okrajových podmienok získame koeficienty c_1 a c_2 ,

$$\begin{aligned}c_2 &= T_1, \\ c_1 &= \frac{T_2 - T_1}{L},\end{aligned}$$

a teda stacionárne riešenie je

$$u(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

V uvedenom prípade je stacionárnym riešením časť priamky.



Obr. 5: Stacionárne riešenie rovnice vedenia tepla $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ s okrajovými podmienkami $u(0, t) = T_1$, $u(L, t) = T_2$.

Podobným spôsobom môžeme zistiť stacionárne riešenie rovnice vedenia tepla s okrajovými podmienkami, ktoré určujú tepelný tok na okraji tyče, konkrétne pre prípad tyče s ideálne izolovanými koncami, čiže nulovým tokom

na okrajoch

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Podmienka nezávislosti riešenia na čase opäť vedie na okrajovú úlohu pre jednoduchú obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{dx^2} &= 0, \\ \frac{du}{dx}(0) &= 0, \\ \frac{du}{dx}(L) &= 0,\end{aligned}$$

ktorej všeobecné riešenie je priamka $u(x) = c_1 x + c_2$. Okrajové podmienky nám hovoria, že táto priamka má mať nulový sklon v 0 a L , čiže riešením bude konštantná funkcia. Naozaj, po aplikovaní okrajových podmienok dostaneme, že

$$u(x) = c_1.$$

Aby sme mohli určiť konkrétnu hodnotu konštanty c_2 , potrebujeme ešte nejakú informáciu navyše, konkrétne začiatočné rozloženie teploty (všimnime si, že v prípade predpísaných teplôt na okrajoch sme začiatočnú podmienku nepotrebovali). Nech teda začiatočná teplota je $u(x, 0) = f(x)$. Keďže tyč je izolovaná, celková tepelná energia v tyči musí byť konštantná. Použitím vzťahu (5), kde $e = c\rho u$ a $\phi = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}$ (pričom c a ρ považujeme za konštanty) a $Q = 0$ získame

$$\frac{d}{dt} \int_0^L c\rho u \, dx = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0) + K_0 \frac{\partial u}{\partial x}(L) = 0,$$

čiže

$$\int_0^L c\rho u \, dx = c_0,$$

Tyč je izolovaná, takže celková energia pri začiatočnom rozdelení teploty sa rovná energii v každom čase, čo sme ukázali, že je c_0 . Celková energia na

začiatku je

$$c\rho \int_0^L f(x)dx.$$

Táto sa musí rovnať celkovej energii pri rozložení teploty zodpovedajúcim stacionárnemu riešeniu, čo je

$$c\rho \int_0^L c_1 dx = c\rho c_1 L,$$

čiže

$$c\rho \int_0^L f(x)dx = c\rho c_1 L,$$

a teda

$$u(x) = c_1 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

A výraz na pravej strane je vlastne stredná hodnota počiatočného rozloženia teploty.

Stacionárne riešenie rovnice vedenia tepla je riešenie, ktoré nezávisí od časovej premennej.

Stacionárne riešenie okrajovej úlohy

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, t) &= T_1, \\ u(L, t) &= T_2\end{aligned}$$

je

$$u(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

Stacionárne riešenie okrajovej úlohy

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= 0\end{aligned}$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = f(x)$$

je

$$u(x) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

0.3 Riešenie rovnice vedenia tepla na ohraničenom intervale

V predchádzajúcej časti sme si odvodili rovnicu vedenia tepla a podmienky (počiatočná, okrajové), za ktorých by sme mali byť schopní nájsť jej riešenie. V tejto časti si predstavíme metódu, pomocou ktorej budeme schopní nájsť riešenie rovnice vedenia tepla pre homogénnu rovnicu vedenia tepla s konštantnými koeficientami bez vnútorných zdrojov tepla so špeciálnymi okrajovými podmienkami a špeciálnou začiatočnou podmienkou. Konkrétne teda budeme uvažovať rovnicu vedenia tepla v tvare

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0 \quad (14)$$

s okrajovými podmienkami

$$u(0, t) = 0 \quad (15)$$

$$u(L, t) = 0 \quad (16)$$

a zatiaľ všeobecnou začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = f(x). \quad (17)$$

Táto úloha fyzikálne zodpovedá vedeniu tepla v tyči dĺžky L konštantného prierezu, s konštantnými tepelnými vlastnosťami, ktorej konce sú udržiavané na konštantnej teplote 0° .

0.3.1 Metóda separácie premenných

Ideou predstavenej metódy je hľadať riešenie $u(x, t)$ v tvare súčinu dvoch funkcií, pričom každá z týchto funkcií je funkciou jednej premennej,

$$u(x, t) = \phi(x)G(t). \quad (18)$$

Dosadíme teda (18) do (14). Derivovaním (18) podľa t a dva krát podľa x dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \phi(x) \frac{dG}{dt}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{d^2 \phi}{dx^2} G(t) \end{aligned}$$

a rovnica (14) prejde na tvar

$$\phi(x) \frac{dG}{dt} = kG(t) \frac{d^2 \phi}{dx^2}. \quad (19)$$

V ňom si všimneme, že môžeme „odseparovať“ funkcie závislé od x a od t tak, aby funkcie jednej konkrétnej premennej boli na jednej strane rovnice. Konštanty možno v princípe umiestniť ľubovoľne. My si zvolíme nasledovný tvar po odseparovaní premenných

$$\frac{1}{kG} \frac{dG}{dt} = \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dx^2}. \quad (20)$$

Na ľavej strane rovnosti máme teda funkciu od t a na pravej funkciu od x . Keďže x od t nezávisí a ani t od x nezávisí, z rovnosti (20) dostaneme, že funkcie na oboch stranách tejto rovnosti musia byť rovné rovnakej konštante. Z istých dôvodov označme túto konštantu $-\lambda$. Týmto spôsobom sme dostali z parciálnej diferenciálnej rovnice (14) dve obyčajné diferenciálne rovnice

$$\begin{aligned} \frac{1}{kG} \frac{dG}{dt} &= -\lambda \\ \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dx^2} &= -\lambda \end{aligned}$$

resp. po úprave

$$\frac{dG}{dt} = -\lambda k G \quad (21)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi \quad (22)$$

Pozrime sa, čo pre funkcie ϕ a G vieme získať z okrajových podmienok (15) a (16). Z (15) máme že $\phi(0)G(t) = 0$ pre každé $t > 0$. To je možné práve vtedy, keď $\phi(0) = 0$ alebo $G(t) = 0$ pre všetky $t > 0$. V prípade $G(t) = 0$ pre všetky $t > 0$ hneď dostaneme, že riešenie $u(x, t) = 0$ pre všetky x a t je riešením rovnice 14 s okrajovými podmienkami (15) a (16). Takéto riešenie nazývame triviálnym riešením uvedenej parciálnej diferenciálnej rovnice s okrajovými podmienkami. Takže netriviálny prípad môžeme dostať pre $\phi(0) = 0$.

Z druhej okrajovej podmienky (16) získame $\phi(L)G(t) = 0$ a podobnou úvahou ako v predošlom odstavci prideme k záveru, že $\phi(L) = 0$.

Pre diferenciálnu rovnicu (21) nemáme tým pádom (zatiaľ) žiadne podmienky, zato pre rovnicu (22) sme získali dve okrajové podmienky $\phi(0) = 0$ a $\phi(L) = 0$.

Všeobecné riešenie rovnice (21) je dobre známe,

$$G(t) = ce^{-\lambda kt}, \quad (23)$$

kde e je Eulerovo číslo a c je ľubovoľná konštanta. Časovo závislá zložka riešenia je teda exponenciálna funkcia. Tu konštanta λ určuje správanie funkcie $G(t)$. Zrejme z fyzikálneho hľadiska pri nami namodelovanej situácii neočakávame exponenciálny rast (keď $\lambda < 0$), takže máme $\lambda \geq 0$. Tento fakt neskôr vyplynie aj z formálnych argumentov.

Pozrime sa ďalej na priestorovú zložku riešenia, ktorá je určená obyčajnou diferenciálnou rovnicou druhého stupňa (22) s okrajovými podmienkami (tzv. okrajová úloha),

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi \quad (24)$$

$$\phi(0) = 0 \quad (25)$$

$$\phi(L) = 0 \quad (26)$$

Na rozdiel od začiatočnej úlohy (t.j. obyčajnej diferenciálnej rovnice so začiatočnými podmienkami) pre ktorú je existencia a jednoznačnosť riešenia v princípe zaručená, pre okrajové úlohy neexistuje jednoduchá teória, ktorá by zaručovala existenciu a jednoznačnosť riešení takýchto úloh. Čo vieme v našom prípade určite povedať, že funkcia $\phi(x) = 0$ pre každé x je určite riešením

(24) spĺňajúca (25) a (26). Toto riešenie voláme triviálne riešenie okrajovej úlohy a zodpovedá triviálnemu riešeniu rovnice vedenia tepla. Otázka je, či existujú aj nejaké netriviálne riešenia uvedenej okrajovej úlohy. Ukáže sa, že áno, avšak existencia ďalších riešení bude závisieť od hodnoty konštanty λ . Tieto hodnoty λ nazývame vlastné hodnoty a príslušné riešenia okrajovej úlohy nazývame vlastné funkcie.

Všeobecné riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice druhého rádu (24) spočítame štandardným spôsobom. Charakteristická rovnica asociovaná s rovnicou (24) je $r^2 = -\lambda$. V závislosti od λ dostávame

- dva rýdzo imaginárne korene $r = \pm i\sqrt{\lambda}$ ak $\lambda > 0$,
- dvojnásobný koreň $r = 0$, ak $\lambda = 0$,
- dva rôzne reálne korene $r = \pm\sqrt{-\lambda}$, ak $\lambda < 0$.

Všeobecné riešenie (24) bude potom závisieť od λ . Pozrime sa na jednotlivé prípady.

$\lambda > 0$ Pre tento prípad máme dve nezávislé riešenia rovnice (24), $e^{i\sqrt{\lambda}x}$ a $e^{-i\sqrt{\lambda}x}$. Pomerne jednoducho vidno, že ľubovoľná lineárna kombinácia týchto riešení je tiež riešenie rovnice (24). Preto z Eulerovho vzťahu $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ môžeme všeobecné riešenie ϕ rovnice (24) napísať v tvare

$$\phi = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Z okrajovej podmienky $\phi(0) = 0$ dostaneme že $c_1=0$, takže

$$\phi(x) = c_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Druhá okrajová podmienka $\phi(L) = 0$ vedie k rovnici

$$0 = c_2 \sin \sqrt{\lambda}L,$$

čiže

$$\sqrt{\lambda}L = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

a preto vlastné hodnoty sú

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

a vlastná funkcia prislúchajúca vlastnej hodnote $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ je

$$\phi(x) = c_2 \sin \sqrt{\lambda_n}x = c_2 \sin \frac{n\pi}{L}x.$$

$\lambda = 0$ V tomto prípade rovnica (24) bude

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0,$$

ktorej jej všeobecné riešenie je

$$\phi = c_1 + c_2 x$$

Okrajové podmienky $\phi(0) = 0$ a $\phi(L) = 0$ implikujú $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$. Preto v tomto prípade dostávame len triviálne riešenie $\phi = 0$ a $\lambda = 0$ nepovažujeme za vlastnú hodnotu.

$\lambda < 0$ Dve nezávislé riešenia rovnice (24) v tomto prípade sú $e^{\sqrt{-\lambda}x}$ a $e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Kvôli zjednodušeniu zápisu zavedieme substitúciu $s = -\lambda$. Potom uvedené riešenia budú mať tvar $e^{\sqrt{s}x}$ a $e^{-\sqrt{s}x}$, $s > 0$ a všeobecné riešenie bude

$$\phi = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}.$$

Kvôli ďalšej analýze s využitím faktu, že ľubovoľná lineárna kombinácia uvedených riešení rovnice (24) je riešenie rovnice (24) prepíšeme uvedené všeobecné riešenie do iného tvaru. Na to využijeme funkcie hyperbolický sínus a hyperbolický kosínus

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

ktoré sú lineárnymi kombináciami pôvodných exponenciálnych funkcií, a teda sú tiež riešením rovnice (24). Získame tak riešenie v tvare

$$\phi = c_3 \cosh \sqrt{s}x + c_4 \sinh \sqrt{s}x$$

Z okrajovej podmienky $\phi(0) = 0$ a z faktu, že $\cosh 0 = 1$ a $\sinh 0 = 0$ dostaneme $c_3 = 0$ a predpis pre ϕ

$$\phi = c_4 \sinh \sqrt{s}x$$

Z okrajovej podmienky $\phi(L) = 0$ získame rovnicu

$$0 = c_4 \sinh \sqrt{s}L.$$

Buď je teda $c_4 = 0$ a vtedy je $\phi = 0$ triviálne riešenie, alebo v opačnom prípade, keďže funkcia $\sinh x$ je nulová len pre $x = 0$, ľahko odvodíme, že $s = 0$ a opäť bude $\phi = 0$.

Tým sme ukázali, že zaujímavé netriviálne riešenia rovnice (24) dostaneme len pre $\lambda > 0$.

Okrajová úloha

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} &= -\lambda\phi \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0\end{aligned}$$

Vlastné hodnoty

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Vlastné funkcie

$$\phi_n(x) = c_2 \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad c_2 \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Teraz sa môžeme vrátiť späť k rovnici vedenia tepla (14) s okrajovými podmienkami (15) a (16). Riešenie sme hľadali metódou separácie premenných v tvare $u(x, t) = \phi(x)G(t)$. Po dosadení G z (23) a ϕ dostaneme, že riešením rovnice vedenia tepla (14) s okrajovými podmienkami (15) a (16) je funkcia

$$u(x, t) = B \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad B \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Samozrejme, rôznou voľbou n dostaneme rôzne riešenia.

Zatiaľ sme nebrali vôbec do úvahy začiatočnú podmienku. Ak do (27) dosadíme $t = 0$, dostaneme

$$u(x, 0) = B \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Z toho sa môže zdať, že riešenie uvažovanej rovnice vedenia tepla s danými okrajovými podmienkami vieme nájsť len pre začiatočnú podmienku špeciálneho tvaru. Môžeme si však uvedomiť niekoľko vecí:

- Ak $u(x, t)$ a $v(x, t)$ sú riešenia rovnice vedenia tepla (14) s okrajovými podmienkami (15) a (16), tak aj $u(x, t) + v(x, t)$ je riešením.

Pomerne jednoducho je vidno, že vyššie uvedené tvrdenie je možné rozšíriť na ľubovoľný konečný počet riešení uvedenej rovnice vedenia tepla. Ak teda

vezmeme počiatočnú podmienku v tvare

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^M B_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

riešením problému (14), (15), (16), bude funkcia

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^M B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

Čiže riešenie rovnice vedenia tepla s okrajovými podmienkami (14), (15), (16) vieme nájsť ak začiatočná podmienka je v tvare konečnej lineárnej kombinácie sínusov.

To však určite nie sú všetky funkcie, takže je prirodzená otázka, čo v prípade, že ako začiatočná podmienka bude funkcia, ktorá nie je takouto konečnou lineárnou kombináciou. V takom prípade nám pomôže teória Fourierových radov, z ktorej vyplývajú nasledovné fakty

- Každú funkciu $f(x)$ (za určitých miernych obmedzení) je možné aproximovať konečnou lineárnou kombináciou sínusov $\sin \frac{n\pi x}{L}$.
- Aproximácia sa zlepšuje s rastúcim počtom členov lineárnej kombinácie.
- Pre $n \rightarrow \infty$ výsledný goniometrický rad konverguje (za určitých podmienok) k pôvodnej funkcii $f(x)$.

Ak prijmeme tieto tvrdenia, potom každú začiatočnú podmienku vieme zapísať v tvare radu

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

a riešenie rovnice vedenia tepla (14) s okrajovými podmienkami (15), (16), s vyššie uvedenou začiatočnou podmienkou je

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

Rovnica vedenia tepla, okrajové podmienky, začiatočná podmienka

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}.\end{aligned}$$

Riešenie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

Podobným spôsobom sa dá metóda separácie premenných použiť pri riešení rovnice vedenia tepla s okrajovými podmienkami

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(0, x) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, x) &= 0,\end{aligned}$$

Pri rozklade $u(x, t) = \phi(x)G(t)$ dostaneme pre $G(t)$ rovnakým postupom ako v predchádzajúcom prípade

$$G(t) = ce^{-k\lambda t}$$

Pre $\phi(x)$ však získame nasledovnú okrajovú úlohu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -\lambda \phi, \\ \frac{d\phi}{dx}(0) &= 0, \\ \frac{d\phi}{dx}(L) &= 0.\end{aligned}$$

Opäť je potrebné postupne uvažovať $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ a $\lambda < 0$.

V prípade $\lambda > 0$ je všeobecné riešenie pre ϕ

$$\phi = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Derivovaním dostaneme

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{\lambda}(-c_1 \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x).$$

Z okrajovej podmienky $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ hneď získame $c_2 = 0$. Druhá okrajová podmienka potom dáva

$$-\sqrt{\lambda}c_1 \sin \sqrt{\lambda}L = 0.$$

Netriviálne riešenie dostaneme pre $c_1 \neq 0$, preto musí byť $\sin \sqrt{\lambda}L = 0$. Z toho dostaneme vlastné hodnoty

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a vlastné funkcie

$$\phi(x) = c_1 \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Súčinové riešenie potom bude

$$u(x, t) = A \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

kde A je ľubovoľná konštanta.

V prípade $\lambda = 0$ dostávame okrajovú úlohu, ktorú sme už v inej súvislosti riešili. Zistili sme, že v tomto prípade existuje netriviálne riešenie, ktorým je ľubovoľná konštanta

$$\phi(x) = c_0.$$

Keďže pre $\lambda = 0$ je časová zložka $G(t) = c$, súčinové riešenie je

$$u(x, t) = A.$$

Pre $\lambda < 0$ sa dá opäť ukázať, že netriviálne súčinové riešenie neexistuje.

Ak si opäť uvedomíme fakt, že aj v tomto prípade súčet riešení je riešenie, môžeme riešenie $u(x, t)$ zapísať v tvare

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

Počiatočná podmienka $u(x, 0) = f(x)$ bude splnená, pokiaľ $f(x)$ je tvaru

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Rovnica vedenia tepla, okrajové podmienky, začiatočná podmienka

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \end{aligned}$$

Riešenie

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

Na záver si namodelujeme časový vývoj teploty v tenkom kruhovom prstenci dĺžky (s obvodom) $2L$. Aby sme mohli použiť metódu separácie premenných potrebujeme zrejme poznať okrajové podmienky. Tie získame jednoducho tak, že prstenec v jednom mieste rozpojíme a budeme sa naň pozeráť ako na priamu tenkú tyč dĺžky $2L$. Z istých dôvodov súradnice okrajov tejto tyče zvolíme $-L$ a L . Ak vezmeme do úvahy, že pôvodne táto tyč tvorila súvislý prstenec, tak v bodoch $-L$ a L dochádza k ideálnemu tepelnému kontaktu. To znamená, že okrajové teplota aj tepelný tok na okrajoch tyče $-L$ a L sú rovnaké, čiže

$$\begin{aligned} u(-L, t) &= u(L, t), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(-L, t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(L, t). \end{aligned}$$

Tento typ okrajových podmienok nazývame periodické okrajové podmienky. Celý model uvažovaného problému teda pozostáva z rovnice vedenia tepla a

vyššie uvedených okrajových podmienok.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(-L, t) &= u(L, t), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(-L, t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(L, t).\end{aligned}$$

Riešenie budeme hľadať opäť v tvare súčinu $u(x, t) = \phi(x)G(t)$, pričom rovnako ako v predošlých prípadoch je $G(t) = ce^{-\lambda kt}$.

Príslušný okrajový problém pre ϕ bude

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -\lambda \phi \\ \phi(-L) &= \phi(L), \\ \frac{d\phi}{dx}(-L) &= \frac{d\phi}{dx}(L).\end{aligned}$$

Všeobecné riešenie je opäť

$$\phi = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

Po aplikácii okrajových podmienok pre $\lambda > 0$ získame dve rovnice

$$\begin{aligned}c_2 \sin \sqrt{\lambda}x &= 0 \\ c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x &= 0.\end{aligned}$$

Ak teda $\sin \sqrt{\lambda}x \neq 0$, tak $c_1 = c_2 = 0$ čím získame len triviálne riešenie. V prípade $\sin \sqrt{\lambda}x$ dostaneme vlastné hodnoty $\lambda = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Na konštanty c_1 a c_2 však nekladíme žiadne ďalšie podmienky a je možné ich voliť ľubovoľne. Preto za vlastné funkcie môžeme považovať funkcie

$$\phi(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a

$$\phi(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ľubovoľná lineárna kombinácia týchto vlastných funkcií (pre danú vlastnú hodnotu) je samozrejme opäť vlastná funkcia.

Pomerne jednoducho sa ukáže že pre $\lambda = 0$ dostaneme netriviálne riešenie

$$\phi(x) = c_1,$$

ktoré je tým pádom vlastnou funkciou zodpovedajúcou vlastnej hodnote $\lambda = 0$, a ďalej žiadne $\lambda < 0$ nie je vlastnou funkciou.

Pre každú z vlastných funkcií pre $\lambda > 0$ získame súčinové riešenie

$$u(x, t) = \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt}$$

resp.

$$u(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt}$$

Preto všeobecné riešenie rovnice vedenia tepla na kruhovom prstenci bude

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt}.$$

Počiatočnú podmienku $u(x, 0) = f(x)$ je možné splniť, pokiaľ

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Rovnica vedenia tepla, okrajové podmienky, začiatočná podmienka

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(-L, t) &= u(L, t), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(L, t), \\ u(x, 0) &= f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \end{aligned}$$

Riešenie

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

0.4 Ortogonálne systémy funkcií

Pri hľadaní riešenia rovnice vedenia tepla s vhodnými okrajovými podmienkami sme ukázali, že jej riešenie vieme nájsť priamo, pokiaľ začiatočná podmienka má špeciálny tvar

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (28)$$

alebo

$$u(x, 0) = f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (29)$$

prípadne ich kombináciu

$$u(x, 0) = f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (30)$$

Tieto podmienky vyzerajú na prvý pohľad dosť obmedzujúco. Avšak v skutočnosti je možné v tvare uvedených radov vyjadriť dostatočne veľkú triedu funkcií. Takže ak uveríme, že skoro každú funkciu vieme zapísať pomocou niektorého z vyššie uvedených radov, tak to čo potrebujeme nájsť sú koeficienty A_n a/alebo B_n . Na ich určenie využijeme fakt, že množina funkcií $\{\sin \frac{n\pi x}{L}; n = 1, 2, \dots\}$ a $\{\cos \frac{n\pi x}{L}; n = 1, 2, \dots\}$ tvoria takzvané ortogonálne systémy funkcií.

V algebre sa kolmosť (ortogonalita) dvoch vektorov určuje použitím skalárneho súčinu. V trojrozmernom vektorovom priestore V so zvolenou bázou ortonormálnych vektorov $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sa (štandardný) skalárny súčin vektorov $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ a $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ spočíta ako

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ sú na seba kolmé, ak $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Na vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ sa môžeme pozeráť ako na funkcie $U(x)$ a $V(x)$, kde $x \in \{1, 2, 3\}$ a $U(1) = u_1$, $U(2) = u_2$, $U(3) = u_3$ a podobne $V(1) = v_1$, $V(2) = v_2$ a $V(3) = v_3$. Spočítať skalárny súčin takto chápaných vektorov teda znamená postupne vynásobiť hodnoty funkcií pre zodpovedajúce si x a výsledky sčítať, symbolicky zapísané

$$U \cdot V = \sum_{i=1}^3 U(i)V(i).$$

Pre „klasické“ funkcie f a g s rovnakým definičným oborom môžeme definovať skalárny súčin podobne, len súčet nahradíme integrovaním, čiže

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

samozrejme za predpokladu, že daný integrál existuje. Potom môžeme definovať kolmosť dvoch funkcií podobne ako pri vektoroch, teda f je kolmá na g , ak

$$f \cdot g = 0.$$

Systém funkcií $\{f_i; i \in J\}$ nazývame ortogonálny systém funkcií, ak $f_i \cdot f_j = 0$ pre $i \neq j$.

Pokiaľ vo vektorovom priestore V zvolíme ortogonálnu bázu $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ (uvedené vektory nemusia mať jednotkovú dĺžku) tak súradnice vektora $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3$ vieme získať použitím skalárneho súčinu. Vynásobením vektora $\mathbf{u}$ báзовým vektorom $\mathbf{b}_1$ ortogonálnej bázy dostaneme

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_1 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_1.$$

Potom z ortogonalít vektorov $\mathbf{b}_i$ máme $\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_1 = 0$ a $\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_1 = 0$. Takže

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1,$$

a preto

$$\alpha_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}.$$

Podobným spôsobom je možné vyjadriť súradnice α_2 a α_3 .

Analogicky môžeme vyjadriť koeficienty B_n a A_n z radov (28), (29) a (30). Platí totiž

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L/2 & m = n. \end{cases} \\ \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L/2 & m = n \neq 0. \\ L & m = n = 0. \end{cases} \\ \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} &= 0. \end{aligned}$$

Systémy funkcií

$$\begin{aligned} &\left\{\sin \frac{n\pi x}{L}; n = 1, 2, 3, \dots; 0 < x < L\right\} \\ &\left\{\cos \frac{n\pi x}{L}; n = 0, 1, 2, 3, \dots; 0 < x < L\right\} \\ &\left\{\sin \frac{n\pi x}{L}, \cos \frac{n\pi x}{L}; n = 0, 1, 2, 3, \dots; -L < x < L\right\} \end{aligned}$$

sú ortogonálne systémy funkcií.

Z toho sa pomerne jednoducho odvodí vyjadrenia koeficientov B_n , A_n v riešeniach rovnice vedenia tepla na intervale $0 < x < L$ s okrajovými podmienkami typu nulová teplota, resp. nulový tok

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \\ B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \\ A_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \\ A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n > 0. \end{aligned}$$

V prípade rovnice vedenia tepla na intervale $-L < x < L$ s periodickými okrajovými podmienkami sú koeficienty nasledovné

$$\begin{aligned}
f(x) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \\
A_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\
A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n > 0. \\
B_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n > 0.
\end{aligned}$$

0.5 Rovnica vedenia tepla na neohraničenom intervale

Skôr, než sa začneme venovať téme z názvu, pripomenieme si iný spôsob zápisu Fourierovho radu.

Komplexný tvar Fourierovho radu

Spojité, $2L$ -periodické funkcie ($f(-L) = f(L)$) vieme zapísať v tvare Fourierovho radu

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (31)$$

Koeficienty a_0 , a_n a b_n vieme spočítať zo vzorcov

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \\
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.
\end{aligned}$$

Funkcie $\sin$ a $\cos$ je možné vyjadriť v komplexnom tvare ako

$$\cos x = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Po dosadení do (31) a jednoduchých úpravách získame Fourierov rad funkcie f v komplexnom tvare

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L}, \quad (32)$$

pričom koeficienty tohto radu sú pre $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L} dx.$$

a $c_0 = a_0$. V prípade, že $f(x)$ je reálna funkcia, $c_{-n} = \bar{c}_n$.

Formulu na výpočet koeficientov c_n je tiež možné získať priamo z (32) využitím ortogonalít. V prípade komplexných funkcií je však potrebné použiť definíciu skalárneho súčinu v tvare

$$f \cdot g = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Vzhľadom na tento skalárny súčin je systém funkcií $\{e^{-in\pi x/L}; -L < x < L; n \in \mathbb{Z}\}$ ortogonálnym systémom funkcií, pričom

$$\int_{-L}^L \overline{e^{-in\pi x/L}} e^{-im\pi x/L} dx = \int_{-L}^L e^{in\pi x/L} e^{-im\pi x/L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2L, & m = n. \end{cases}$$

Takže pre násobenie (32) funkciou $e^{im\pi x/L}$ a integrovaním od $-L$ po L dostaneme

$$\int_{-L}^L f(x) e^{im\pi x/L} dx = 2L c_m,$$

z čoho už c_m vyjadríme ľahko.

Fourierov rad funkcie $f(x)$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Koeficienty:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Fourierov rad funkcie $f(x)$ - komplexný tvar

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L},$$

Koeficienty:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L} dx.$$

0.5.1 Rovnica vedenia tepla – neohraničený interval

V predchádzajúcich častiach sme videli, že pri ohraničených problémoch sme na nájdenie riešenia rovnice vedenia tepla potrebovali poznať okrajové podmienky. Čo však v prípade, ak modelujeme úlohu pri ktorej vieme, že vplyv okrajových podmienok je zanedbateľný. V takom prípade sa ukazuje rozumné uvažovať neohraničený interval.

Uvažujme teda rovnicu vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (33)$$

pričom požadujeme, aby riešenie $u(x, t)$ tejto rovnice bolo definované na intervale $-\infty < x < \infty$. Počiatočnú podmienku $u(x, 0) = f(x)$ potrebujeme samozrejme aj tentokrát.

Na prvý pohľad sa zdá, že okrajové podmienky nepotrebujeme. Z fyzikálnych dôvodov však často zadávame správanie teploty limitne v $\pm\infty$. Asi najjednoduchší prípad je $u(\pm\infty, t) = 0$.

Vieme, že výrazy $\sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}$ a $\cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}$ sú riešením rovnice (33) pre každé celé číslo n . Potom aj ich kombinácia

$$\cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} + i \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} = e^{in\pi/L x} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \quad (34)$$

je riešením tejto rovnice pre každé celé číslo n . Ľahko sa dá presvedčiť o tom, že keď nahradíme výraz $n\pi/L$ ľubovoľným reálnym číslom ω

$$u = e^{i\omega x} e^{-k\omega^2 t}, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (35)$$

bude stále riešením rovnice (33). Všimnime si, že v prípade riešení rovnice vedenia tepla na ohraničenom intervale, tvorili vlastné čísla diskretnú množinu (tzv. diskretné spektrum), zatiaľ čo v prípade riešení typu (35) tvoria čísla ω celé kontinuum (spojité spektrum).

Riešenia tvaru (35) je možné odvodiť použitím metódy separácie premenných, zavedením $u(x, t) = \phi(x)G(t)$. Tým získame opäť dve obyčajné diferenciálne rovnice rovnako ako v prípade ohraničeného problému

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= -\lambda k G, \\ \frac{d^2\phi}{dx^2} &= -\lambda \phi. \end{aligned}$$

Všeobecné riešenie pre G je zrejme rovnaké ako pri ohraničenom probléme. Pri riešení okrajového problému pre ϕ narazíme na problém. Ak by sme ako okrajové podmienky vzali $\phi(\pm\infty) = 0$, tak tento problém nebude mať netriviálne riešenie pre žiadne λ . Pre $\lambda > 0$ dostaneme oscilatorické riešenia tvaru $c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$, pre $\lambda < 0$ podobne len hyperbolickými funkciami a $\lambda = 0$ vráti lineárnu funkciu.

Preto trochu zoslabíme okrajové podmienky tak, že budeme predpokladať, že riešenie je v nekonečne ohraničené $|\phi(\pm\infty)| < \infty$. Vtedy už okrajovej úlohe vyhovujú riešenia pre ľubovoľné $\lambda > 0$

$$\phi = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

a $\lambda = 0$, pre ktorú je ϕ nenulová konštanta.

Všimnime si, že v prípade riešení rovnice vedenia tepla na ohraničenom intervale, tvorili vlastné čísla diskretnú množinu (tzv. diskrétné spektrum), zatiaľ čo v prípade práve získaného riešenia tvoria čísla λ celé kontinuum (spojité spektrum).

Týmto spôsobom teda získame riešenia $\sin \sqrt{\lambda} x e^{-\lambda k t}$ a $\cos \sqrt{\lambda} x e^{-\lambda k t}$. V prípade konečného problému (a teda diskrétneho spektra) sme výsledné všeobecné riešenie získali ako súčet skalárnych násobkov riešení uvedených typov pre všetky vlastné hodnoty λ . Keďže teraz vlastné hodnoty tvoria kontinuum, súčet nahradíme integrálom. Získame tak všeobecné riešenie v tvare

$$u(x, t) = \int_0^\infty c_1(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} x e^{-\lambda k t} + c_2(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} x e^{-\lambda k t} d\lambda,$$

kde $c_1(\lambda)$ a $c_2(\lambda)$ sú ľubovoľné funkcie. Zvyčajne sa v tomto riešení nahrádza $\lambda = \omega^2$, a potom

$$u(x, t) = \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega x e^{-\omega^2 k t} + B(\omega) \sin \omega x e^{-\omega^2 k t} d\omega,$$

pričom $A(\omega)$ a $B(\omega)$ vzniknú z funkcií $c_1(\lambda)$ a $c_2(\lambda)$ zámenou premenných v integrále, čiže $A(\omega) = 2\omega c_1(\omega^2)$ a podobne pre B .

Na nájdenie funkcií $A(\omega)$ a $B(\omega)$ potrebujeme potom poznať začiatočnú podmienku v tvare

$$u(x, 0) = \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x d\omega$$

Kompaktnejší (a v istom zmysle všeobecnejší) tvar riešenia dostaneme, keď namiesto riešení $\cos$ a $\sin$ pre ϕ vezmeme komplexné riešenia $e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$ pre $\lambda \geq 0$. Substitúciou $\omega = \sqrt{\lambda}$ dostaneme riešenia $e^{\pm i\omega x}$ pre $\omega \geq 0$, ktoré tvoria tú istú množinu riešení, ako $e^{-i\omega x}$ pre $\omega \in \mathbb{R}$. Potom riešením rovnice vedenia tepla bude $u(x, t) = e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t}$, resp. ľubovoľná ich kombinácia v integrálnom zmysle

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^\infty c(\omega) e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t} d\omega$$

V tomto prípade je počiatočná podmienka splnená pre $u(x, 0) = f(x)$ v tvare

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty c(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$$

Akýsi náznak, prečo v prípade neohraničeného dostaneme kontinuum vlastných hodnôt si ukážeme na nasledovnom príklade:

Príklad: Uvažujme rovnicu vedenia tepla s periodickými okrajovými podmienkami a začiatočnou podmienkou

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(-L, t) &= u(L, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} u(-L, t) &= \frac{\partial}{\partial x} u(L, t) \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}\end{aligned}$$

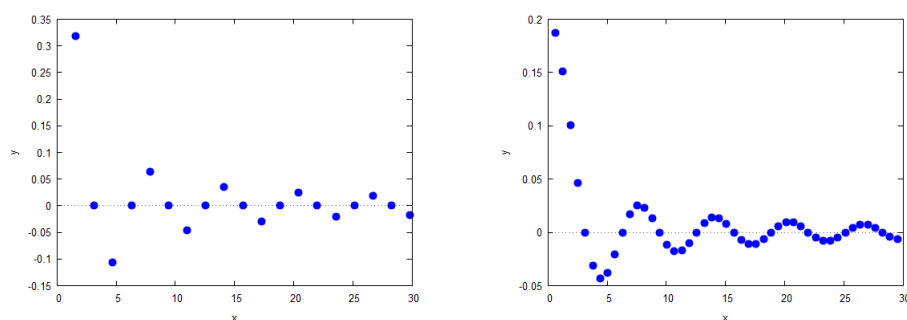
Vieme, že riešenie je určené hodnotami koeficientov a_n a b_n , ktoré získame ako koeficienty Fourierovho radu začiatočnej podmienky $u(x, 0)$. Vyššie sme ukázali, ako tieto koeficienty zakódovať do koeficientov Fourierovho radu v komplexnom tvare uvedenej reálnej funkcie $u(x, 0)$.

$$\begin{aligned}c_0 &= a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x, 0) dx = \frac{1}{L} \\ c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x, 0) e^{in\pi x/L} dx = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L}, \text{ pre } n > 0. \\ c_{-n} &= \bar{c}_n.\end{aligned}$$

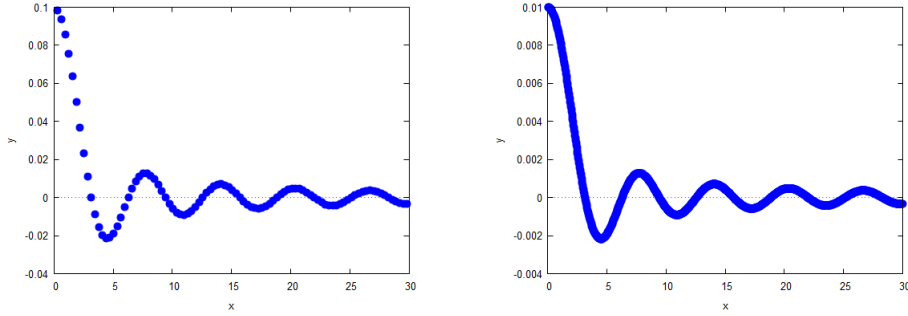
Po substitúcii $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$

$$c_n = \frac{1}{L\omega_n} \sin \omega_n = \frac{1}{L} \frac{\sin \omega_n}{\omega_n}$$

Pre dané L môžeme ω_n vynášať na x -ovú os. Ak na os y vynášame hodnoty c_n dostaneme nasledujúce grafy. Môžeme si všimnúť, že s rastúcim L sa



Obr. 6: Grafy pre $L = 2$ vľavo a $L = 5$ vpravo.



Obr. 7: Grafy pre $L = 10$ vľavo a $L = 100$ vpravo.

zmenšuje vzdialenosť medzi dvoma po sebe idúcimi ω_n , čo je zrejmé zo vzťahu

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \quad (36)$$

Teda čím väčšie L , tým viac hodnôt ω (a tým pádom aj vlastných hodnôt) sa nachádza na danom úseku, resp. vzdialenosť medzi dvoma vlastnými hodnotami sa s rastúcim L zmenšuje limitne až k 0. Takto vlastné hodnoty teda postupne s rastúcim L vyplňajú reálnu os (presnejšie jej kladú časť, reálnu os vyplňajú hodnoty ω_n). Preto môžeme očakávať, že pre $L \mapsto \infty$ dostaneme kontinuum vlastných hodnôt. Navyše vieme, nám tento príklad naznačuje, že funkcie definované na $\mathbb{R}$ intervale môžeme v istom zmysle chápať ako periodické funkcie s nekonečnou periódou.

Formalizujme teraz tento prístup. Riešenie rovnice vedenia tepla na konečnom intervale $-L < x < L$ s periodickými okrajovými podmienkami je určené koeficientami Fourierovho radu začiatočnej podmienky $u(x, 0) = f(x)$. Vieme, že ak $f(x)$ je spojitá na $L \leq x \leq L$, tak Fourierov rad tejto funkcie konverguje na tomto intervale k funkcii $f(x)$. Ak $f(x)$ má na uvedenom intervale konečný počet bodov nespojitostí, v bodoch nespojitostí Fourierov rad konverguje k priemeru hodnôt limít zľava a sprava funkcie $f(x)$. Toto posledné tvrdenie samozrejme platí aj pre spojitú funkciu, lebo v bode v ktorom je funkcia spojitá sa limita zľava rovná limite sprava. Ak označíme $f(x-)$ ($f(x+)$) limitu $f(x)$ v bode x zľava (sprava), tak

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L}$$

pričom

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L} dx.$$

V predošlej sume nahraďme c_n (budeme musieť v integrále premenovať premennú x)

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\bar{x}) e^{in\pi\bar{x}/L} d\bar{x} e^{-in\pi x/L}$$

Označme $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$. Tieto tvoria diskretnú množinu hodnôt a vzdialenosť dvoch po sebe idúcich ω_n je $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$. ω_n nazývame vlnové čísla a vyjadrujú počet vln na intervale 2π (uvedomme si, že $f(x)$ je v tvare Fourierovho radu súčtom vln v tvare sínusov alebo kosínusov). Z ω_n ľahko spočítame vlnovú dĺžku príslušnej vlny, ktorá je $\frac{2L}{n}$. Potom $\frac{1}{2L} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$, takže predošlú rovnosť môžeme prepísať ako

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-L}^L f(\bar{x}) e^{i\omega_n\bar{x}} d\bar{x} e^{-i\omega_n x} \quad (37)$$

Funkciu f teda máme napísanú ako súčet vln istých vlnových dĺžok. S rastúcim L získavame stále viac a viac vlnových čísel, tým pádom aj stále viac možných vlnových dĺžok. Takže pre $L \rightarrow \infty$, kedy $\omega_n \rightarrow 0$ môžeme očakávať, že $f(x)$ bude súčtom vln všetkých možných vlnových dĺžok.

Na pravú stranu predošlej rovnosti sa môžeme pozeráť ako na súčet obdĺžnikov s podstavou $\Delta\omega$ a výškou $\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(\bar{x}) e^{i\omega_n\bar{x}} d\bar{x}$. Pre $L \rightarrow \infty$, za predpokladu, že uvedený integrál konverguje, sa tento integrál nebude príliš líšiť od $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) e^{i\omega_n\bar{x}} d\bar{x}$. Takže na pravú stranu (37) sa pre $L \rightarrow \infty$ môžeme pozeráť ako na integrálny súčet. Keďže pre $L \rightarrow \infty$ máme $\Delta\omega \rightarrow 0$ tak môžeme odhadnúť, že

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) e^{i\omega\bar{x}} d\bar{x} \right] e^{-i\omega x} d\omega \quad (38)$$

Túto rovnosť nazývame Fourierova integrálna identita a výraz v hranatých zátvorkách voláme Fourierova transformácia funkcie $f(x)$, ktorej klasické značenie je

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) e^{i\omega\bar{x}} d\bar{x}.$$

V (38) vidíme, že funkciu $f(x)$ máme vyjadrenú ako súčet vln všetkých možných vlnových dĺžok, pričom amplitúda vlny s vlnovým číslom ω je určené hodnotou Fourierovej transformácie funkcie $f(x)$ v ω , t.j. $F(\omega)$. Získali sme teda Fourierovu transformáciu

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) e^{i\omega\bar{x}} d\bar{x}.$$

a inverznú Fourierovu transformáciu (pre spojitú $f(x)$)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega.$$

Vráťme sa späť k rovnici vedenia tepla na neohraničenom intervale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Už sme si povedali, že $e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t}$ je riešením tejto rovnice pre každé reálne číslo ω , preto zo zovšeobecneného princípu superpozície máme, že riešením je funkcia

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t} d\omega.$$

Počiatočná podmienka $u(x, 0) = f(x)$ je splnená, ak

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$$

čo je presne Fourierova integrálna reprezentácia funkcie $f(x)$ a teda $c(\omega)$ je Fourierova transformácia funkcie $f(x)$.

$$c(\omega) = F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx.$$

Riešenie $u(x, t)$ je možné zjednodušiť dosadením $c(\omega)$ a zámenou poradia integrovania.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) e^{i\omega \bar{x}} d\bar{x} e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-\bar{x})} e^{-k\omega^2 t} d\omega d\bar{x} \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} e^{-i\omega x} d\omega$$

je inverzná Fourierova transformácia funkcie $e^{-k\omega^2 t}$, ktorú je možné pomerne jednoducho spočítať a

$$g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Teda riešenie rovnice vedenia tepla na neohraničenom intervale je

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} dx$$

Výhoda takéhoto tvaru riešenia spočíva v tom, že dáva priamy vzťah riešenia od začiatočného rozloženia teploty. Z tohoto tvaru možno vypožorovať, aký je vplyv hodnoty začiatočnej teploty v $\bar{x}$ na hodnotu teploty $u(x, t)$ v danom bode x a čase t . Funkcia

$$G(x, t; \bar{x}, 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt}$$

je špeciálny prípad (resp. špeciálna hodnota) tzv. Greenovej funkcie rovnice vedenia tepla na neohraničenom intervale.

Poznámka: Diracova δ funkcia je „funkcia“ zvyčajne definovaná ako

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

pričom zároveň spĺňa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Obyčajne sa tiež reprezentuje ako limita postupne sa zužujúcich obdĺžnikových funkcií s obsahom 1.

$$u_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a < x < a \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} u_a(x) = \delta(x)$$

Matematicky δ patrí medzi tzv distribúcie. Jej korektná definícia je, že to je objekt, ktorý spĺňa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

Pomocou δ funkcie sa modelujú napr. impulzy.

Pre $t \rightarrow 0$ má funkcia $g(x)$ vlastnosti ako Diracova δ .

Pozrime sa teraz na rovnicu vedenia tepla na neohraničenom intervale so začiatočnou podmienkou $u(x, 0) = \delta(x)$. Fyzikálne by to zodpovedalo situácii,

keď v čase 0 v bode $x = 0$ tyč prudko ohrejete. Keďže už vieme, ako vyzerá riešenie, máme hneď

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{x}) \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} d\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-x^2/4kt}$$

Toto riešenie nazývame fundamentálne riešenie rovnice vedenia tepla.

Príklad: Vezmime rovnicu vedenia tepla na neohraničenom intervale so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = \begin{cases} 100 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Riešením je

$$u(x, t) = \frac{100}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^{\infty} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} d\bar{x},$$

ktoré jednoduchou substitúciou ($z = (\bar{x} - x)/\sqrt{4kt}$) možno previesť na tvar

$$u(x, t) = \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{4kt}}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{100}{\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz + \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-z^2} dz \right).$$

Posledná rovnosť vyplýva z párnosti integrovanej funkcie. Prvý integrál v zátvorke vieme vyčísliť a je rovný $\pi/2$, a teda máme

$$u(x, t) = 50 + \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-z^2} dz$$

Fourierova transformácia rovnice vedenia tepla

Riešenie rovnice vedenia tepla viedlo k zavedeniu Fourierovej transformácie. Pomocou samotnej Fourierovej transformácie je však možné nájsť riešenie aj iným spôsobom, a to aplikovaním Fourierovej transformácie na deriváciu.

0.6 Rovnica vedenia tepla na dvojrozmerných oblastiach

Obdĺžniková oblasť

Princíp odvodenia rovnice vedenia tepla na dvojrozmernej (trojrozmernej) oblasti je podobný ako v jednorozmernom prípade. Vychádza sa so zákona

zachovania energie, čiže zmena tepelnej energie v danej oblasti sa rovná súčtu množstva tepelnej energie, ktorá pretečie cez okraj a množstvu tepelnej energie z vnútorných zdrojov.

Ak označíme $u(x, y, t)$ rozloženie teploty v oblasti R v čase t , tak celková energia v oblasti R bude

$$\iint_R c\rho u \, dS.$$

Vo viacrozmernom prípade je tok tepelnej energie možné chápať ako vektorové pole. Teda v každom bode (x, y) oblasti R je $\phi(x, y, t)$ vektor toku tepelnej energie. Pokiaľ $\hat{\mathbf{n}}$ označuje jednotkový vektor vonkajšej normály k okraju oblasti ∂R , tak množstvo tepelného toku ktoré pretečie okrajom oblasti R bude

$$\oint_{\partial R} \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\gamma$$

Ak označíme funkciu zdroja vnútornej energie $Q(x, y, t)$, tak zo zákona zachovania dostaneme

$$\frac{d}{dt} \iint_R c\rho u \, dS = - \oint_{\partial R} \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\gamma + \iint_R Q \, dS. \quad (39)$$

Krivkový integrál pre tok môžeme nahradiť plošným vďaka Greenovej vete

$$\oint_{\partial R} \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\gamma = \iint_R \nabla \cdot \phi \, dS,$$

kde

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

čiže

$$\nabla \cdot \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Potom rovnosť (39) môžeme po nahradení krivkového integrálu plošným, výmenou derivácie a integrálu a presunutím na jednu stranu rovnosti upraviť na tvar

$$\iint_R c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \phi - Q \, dS = 0$$

z čoho teda dostávame, že integrand musí byť nulový, a teda

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \phi + Q.$$

Fourierov zákon vedenia tepla má pre viacrozmerné oblasti tvar

$$\phi = -K_0 \nabla u,$$

a po nahradení ϕ v predchádzajúcej rovnosti dostaneme rovnicu vedenia tepla v tvare

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (K_0 \nabla u) + Q.$$

Pre prípad nulových zdrojov vnútornej energie a konštantných tepelných vlastností je rovnicu vedenia tepla možné upraviť na tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla \cdot (\nabla u),$$

pričom (v dvojrozmernom prípade)

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Teda v tomto prípade je rovnicou vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Výraz $\nabla \cdot (\nabla u)$ sa štandardne označuje $\nabla^2 u$ a ∇^2 sa nazýva Laplaceov operátor.

Na úplné zadanie úlohy potrebujeme aj v tomto prípade okrajové podmienky a začiatočnú podmienku.

Začiatočná podmienka je zvyčajne tvaru $u(x, y, 0) = f(x, y)$.

Okrajové podmienky môžeme rozdeliť na dva typy – zadaná teplota alebo zadaný tok, t.j. $u(x, y, t) = g(x, y, t)$ pre $(x, y) \in \partial R$ alebo $\nabla u \cdot \hat{n} = h(x, y, t)$ pre $(x, y) \in \partial R$.

V rovnice je častokrát vhodné pracovať nie v karteziánskych súradniciach, ale v polárnych. V takom prípade bude mať rovnica vedenia tepla iný tvar, ktorý dostaneme zmenou súradníc. Rovnica vedenia tepla v polárnych súradniciach má tvar ($u = u(r, \theta, t)$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]$$

Podme sa pozrieť na riešenia rovnice vedenia tepla pre niektoré jednoduché oblasti.

Príklad: Rovnica vedenia tepla na obdĺžnikovej oblasti.

Hľadáme riešenie rovnice vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

na obdĺžniku $0 < x < L$, $0 < y < H$, s okrajovými podmienkami

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0, \\ u(L, y, t) &= 0, \\ u(x, 0, t) &= 0, \\ u(x, H, t) &= 0. \end{aligned}$$

a začiatočnou podmienkou $u(x, y, 0) = \alpha(x, y)$.

Zo zadania vidíme, že rovnica je homogénna a lineárna a okrajové podmienky sú tiež homogénne a lineárne. Môžeme teda použiť metódu separácie premenných. Napíšme teda $u(x, y, t) = \phi(x, y)h(t)$.

Po dosadení do rovnice vedenia tepla dostaneme (nebudem písať nezávislé premenné)

$$\phi \frac{dh}{dt} = kh \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)$$

a po odseparovaní a zvolení separačnej konštanty máme

$$\frac{1}{kh} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = -\lambda.$$

Dostávame tak dve rovnice

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda kh, \tag{40}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\lambda \phi. \tag{41}$$

Z okrajových podmienok pre u získame okrajové podmienky pre ϕ

$$\begin{aligned} \phi(0, y) &= 0, & \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(L, y) &= 0, & \phi(x, H) &= 0. \end{aligned}$$

Rovnica pre ϕ (41) je lineárna, homogénna a okrajové podmienky pre ϕ sú lineárne a homogénne. Môžeme teda opäť použiť metódu separácie premenných na (41), $\phi(x, y) = f(x)g(y)$,

$$g(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f(x)\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\lambda f(x)g(y).$$

Po odseparovaní premenných upravíme poslednú rovnosť na tvar so separačnou konštantou μ

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\lambda - \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = -\mu$$

Spolu s (40) tak získavame tri rovnice

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= -\lambda k h, \\ \frac{d^2 f}{dx^2} &= -\mu f, \\ \frac{d^2 g}{dy^2} &= -(\lambda - \mu)g\end{aligned}$$

s okrajovými podmienkami pre f a g , ktoré získame z okrajových podmienok pre ϕ

$$\begin{aligned}f(0) &= 0, & g(0) &= 0, \\ f(L) &= 0, & g(H) &= 0.\end{aligned}$$

Riešením rovnice pre h je exponenciálna funkcia $h(x) = ce^{-k\lambda t}$.

Okrajový problém pre f má vlastné čísla $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ a vlastné funkcie $f_n(x) = \sin n\pi x/L$, $n = 1, 2, \dots$

Pre každé vlastné číslo μ_n máme okrajový problém pre g , ktorého vlastné čísla a vlastné funkcie sú pre $m = 1, 2, \dots$

$$\lambda - \mu_n = \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2, \quad g_n(x) = \sin \frac{m\pi y}{H}.$$

Potom pre každé $m, n = 1, 2, \dots$ dostávame vlastnú hodnotu

$$\lambda_{mn} = \mu_n + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2.$$

Súčinové riešenie pre $u = \phi(x, y)h(t) = f(x)g(y)h(t)$ je potom

$$u_{mn}(x, y, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H} e^{-k\lambda_{mn}t}$$

a z princípu superpozície získame riešenie

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H} e^{-k\lambda_{mn}t}.$$

Pre začiatočnú podmienku $u(x, y, 0) = \alpha(x, y)$ vieme koeficienty A_{mn} vyjadriť nasledovným spôsobom

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H} = \alpha(x, y).$$

Vnútrotnú sumu označme

$$B_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Pre každé x je $B_m(x)$ koeficient v sínusovom rade funkcie α

$$\alpha(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \sin \frac{m\pi y}{H},$$

takže

$$B_m(x) = \frac{2}{H} \int_0^H \alpha(x, y) \sin \frac{m\pi y}{H} dy$$

po napísaní $B_m(x)$ ako sumy, teda máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{2}{H} \int_0^H \alpha(x, y) \sin \frac{m\pi y}{H} dy.$$

Koeficienty A_{mn} sú teda koeficienty sínusového radu funkcie na pravej strane poslednej rovnosti, preto

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(\frac{2}{H} \int_0^H \alpha(x, y) \sin \frac{m\pi y}{H} dy \right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H \alpha(x, y) \sin \frac{m\pi y}{H} \sin \frac{n\pi x}{L} dy dx \end{aligned}$$

Podľa sa pozrieť, ako bude vyzeráť riešenie, ak oblasť, na ktorej riešenie budeme hľadať má tvar kruhu. Zaujímá nás teda riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

pričom $x^2 + y^2 \leq a^2$ s okrajovou podmienkou

$$u(x, y, t) = 0$$

na kružnici $x^2 + y^2 = a^2$.

V tomto prípade je lepšie pracovať v polárnych súradniciach, ktoré kruh $x^2 + y^2 \leq a^2$ transformujú na obdĺžnik $0 \leq r \leq a$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Po transformácii súradníc bude mať rovnica vedenia tepla tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]$$

pričom $u = u(r, \theta, t)$. Z okrajovej podmienky v (x, y) získame okrajovú podmienku v (r, θ)

$$u(a, \theta) = 0.$$

Potrebuje okrajové podmienky aj na zvyšných stranách obdĺžnika $u(0, \theta, t)$, $u(r, -\pi, t)$ a $u(r, \pi, t)$. V polárnych súradniciach je $u(0, \theta, t)$ teplota v strede kruhu. Z fyzikálnych dôvodov môžeme teda predpokladať, že táto teplota je ohraničená, $|u(0, \theta)| < \infty$. Keďže v polárnych súradniciach $u(r, -\pi, t)$ a $u(r, \pi, t)$ zodpovedajú teplotám v tých istých bodoch, musia sa nutne rovnať

$$u(r, -\pi, t) = u(r, \pi, t)$$

a tiež

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi, t) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi, t)$$

z dôvodu, že aj tepelný tok v týchto bodoch (resp. ľubovoľných okoliach týchto bodov) je spojitý.

Chceme teda riešiť

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]$$

s okrajovými podmienkami

$$\begin{aligned} u(a, \theta, t) &= 0, \\ u(r, -\pi, t) &= u(r, \pi, t) \\ \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi, t) &= \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi, t) \\ |u(0, \theta)| &< \infty \end{aligned}$$

Okrajové podmienky sú lineárane (aj posledná – lineárna kombinácia ohraničených funkcií je ohraničená) a prvé tri sú homogénne, použijeme teda separáciu premenných, $u(r, \theta, t) = \phi(r, \theta)h(t)$. Po dosadení do rovnice vedenia tepla a odseparovaní premenných dostaneme separované rovnice (so separačnou konštantou $-\lambda$)

$$\frac{1}{kh} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\phi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] = -\lambda$$

Pre časovú zložku $h(t)$ tak dostávame rovnicu

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda kh$$

a pre priestorovú zložku $\phi(x, y)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\lambda \phi$$

po ďalšej separácii $\phi(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ získame (separačnú konštantu zvolíme ako μ , lebo pre g dostaneme okrajový problém s periodickými okrajovými podmienkami)

$$-\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} = \frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \lambda r^2 = \mu$$

z čoho získame rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{d\theta^2} &= -\mu g, \\ r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + (\lambda r^2 - \mu) f &= 0 \end{aligned}$$

Rovnica pre g , spolu s okrajovými podmienkami (ktoré získame z periodických okrajových podmienok pre u) tvorí okrajový problém

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{d\theta^2} &= -\mu g, \\ g(-\pi) &= g(\pi), \\ \frac{dg}{d\theta}(-\pi) &= \frac{dg}{d\theta}(\pi) \end{aligned}$$

Vlastné hodnoty pre tento problém sú $\mu_m = \left(\frac{m\pi}{\pi}\right)^2 = m^2$, $m = 0, 1, 2, \dots$ a vlastné funkcie sú $g_0(\theta) = 1$, a $g_m(\theta) = \cos m\theta$ alebo $g_m(\theta) = \sin m\theta$ pre $m > 0$.

Pre každé μ_m máme problém pre f

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + (\lambda r^2 - m^2) f &= 0 \\ f(a) &= 0, \\ |f(a)| &< \infty. \end{aligned} \quad (\text{PVH})$$

Po vydelení r dostávame Sturm-Liouvillovu diferenciálnu rovnicu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(\lambda r - \frac{m^2}{r} \right) f &= 0, \\ f(a) &= 0, \\ |f(a)| &< \infty. \end{aligned}$$

ktorý nie je regulárny Sturm-Liouvillov problém, avšak napriek tomu pre tento prípad platí nasledovné

- Existuje nekonečne veľa vlastných hodnôt λ_{mn} a vlastných funkcií $f_{mn}(r)$.
- Pre pevne zvolené m sú tieto funkcie ortogonálne s váhou r , čiže

$$\int_0^a f_{mn_1}(r) f_{mn_2}(r) r \, dr = 0, \quad \text{pre } n_1 \neq n_2.$$

(a je polomer kruhu).

Rovnicu (PVH) je možné upraviť na tvar (pravidlo pre deriváciu súčinu funkcií)

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} + (\lambda r^2 - m^2) f = 0$$

a substitúciou $z = \sqrt{\lambda} r$, pre $\lambda > 0$ získame Besselovu diferenciálnu rovnicu

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + (z^2 - m^2) f = 0.$$

Riešenia tejto rovnice sú Besselove funkcie. Rozlišujeme dva druhy Besselových funkcií

- Besselove funkcie 1. druhu $J_m(z)$ – nemajú singularitu v $z = 0$, t.j. $|J_m(z)| < \infty$,

- Besselove funkcie 2. druhu $Y_m(z)$ – majú singularitu v $z = 0$, t.j. $Y_m(z)$ sú neohraničené v ľubovoľnom okolí bodu $z = 0$.

Všeobecné riešenie Besselovej rovnice je kombináciou uvedených Besselových funkcií

$$f(z/\sqrt{\lambda}) = c_1 J_m(z) + c_2 Y_m(z).$$

a spätnou substitúciou pre z dostaneme

$$f(r) = c_1 J_m(\sqrt{\lambda}r) + c_2 Y_m(\sqrt{\lambda}r).$$

Okrajová podmienka $|f(0)| < \infty$ nám hovorí, že uvedené riešenie nemôže obsahovať Y_m , inak by bolo neohraničené, takže $c_2 = 0$. Podmienka $f(a) = 0$ nám dáva

$$0 = f(a) = c_1 J_m(\sqrt{\lambda}a).$$

Keďže voľba $c_1 = 0$ by nám dala triviálne riešenie ($f(r) = 0$, a teda aj $u = 0$), pre $c_1 \neq 0$ musí $J_m(\sqrt{\lambda}a) = 0$. To znamená, že $\sqrt{\lambda}a$ sú také hodnoty, v ktorých J_m je nulové. Označme z_{mn} n-tú takúto hodnotu pre J_m . Potom $z_{mn} = \sqrt{\lambda}a$, z čoho získame vlastné hodnoty

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{z_{mn}}{a}\right)^2.$$

a vlastné funkcie $f_{mn}(r) = J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)$.

Riešenie pre časovú zložku h je $h(t) = e^{-\lambda_{mn}kt}$.

Výsledné riešenie rovnice vedenia tepla získame z princípu superpozície

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos m\theta e^{-\lambda_{mn}kt} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin m\theta e^{-\lambda_{mn}kt}. \end{aligned}$$

Pokiaľ je zadaná začiatočná podmienka $u(r, \theta, 0) = \alpha(r, \theta)$, koeficienty A_{mn} a B_{mn} sa dajú vyjadriť z

$$\begin{aligned} u(r, \theta, 0) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos m\theta \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin m\theta, \end{aligned}$$

čo môžeme chápať ako Fourierov rad s koeficientami

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) = U_m(r)$$

pri $\cos m\theta$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) = V_m(r)$$

pri $\sin m\theta$. Tieto koeficienty sú teda funkcie od závislé od r a s využitím ortogonalít (s váhou r) Besselových funkcií potom máme

$$A_{mn} = \frac{\int_0^a U_m(r) J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) r dr}{\int_0^a J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r)^2 dr}$$

a

$$B_{mn} = \frac{\int_0^a V_m(r) J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) r dr}{\int_0^a J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r)^2 dr}$$

Podobne ako v prípade jednorozmernej rovnice vedenia tepla, môžeme hľadať stacionárne riešenie viacrozmernej rovnice vedenia tepla. Pre dvojrozmerný prípad máme teda $u = u(x, y)$ nezávislú od času a rovnica vedenia tepla prejde na tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (42)$$

Výraz $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sa štandardne označuje $\nabla^2 u$ (číta sa Laplas u). Rovnicu (42) nazývame Laplacova rovnica.

Podme hľadať stacionárne riešenie rovnice vedenia tepla na obdĺžnikovej oblasti $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq H$, so zadanými teplotami na obode obdĺžnika. Riešime teda úlohu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} u(0, y) &= g_1(y), & u(x, 0) &= f_1(x) \\ u(L, y) &= g_2(y), & u(x, H) &= f_2(x) \end{aligned}$$

Keďže okrajové podmienky nie sú homogénne, nemôžeme priamo použiť metódu separácie premenných. Avšak môžeme si uvedomiť, že ak máme riešenie

Laplacovej rovnice, ktoré spĺňa nejaké okrajové podmienky a iné riešenie Laplacovej rovnice spĺňajúce iné okrajové podmienky, tak súčet týchto dvoch riešení bude riešenie Laplacovej rovnice, ktoré bude spĺňať okrajové podmienky, ktoré sú súčtom okrajových podmienok jednotlivých riešení.

Idea je teda hľadať napísať hľadané riešenie ako súčet štyroch funkcií $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y)$, pričom chceme, aby každá z nich riešila Laplacovu rovnicu a každá spĺňať práve jednu nehomogénnu podmienku originálnej funkcie. Dostaneme teda štyri úlohy:

Pre $u_1(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= f_1(x), \\ u_1(x, H) &= u_1(0, y) = u_1(L, y) = 0 \end{aligned}$$

Pre $u_2(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} u_2(x, H) &= f_2(x), \\ u_2(x, 0) &= u_2(0, y) = u_2(L, y) = 0 \end{aligned}$$

Pre $u_3(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} u_3(0, y) &= g_1(y), \\ u_3(x, 0) &= u_3(x, H) = u_3(L, y) = 0 \end{aligned}$$

Pre $u_4(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} u_4(L, y) &= g_2(y), \\ u_4(x, 0) &= u_4(x, H) = u_4(0, y) = 0 \end{aligned}$$

Nájďme riešenie u_3 , zvyšné riešenia sa vypočítajú analogicky.

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} u_3(0, y) &= g_1(y), & u_3(x, 0) &= 0 \\ u_3(L, y) &= 0, & u_3(x, H) &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že máme dve homogénne okrajové podmienky pre premennú y , takže položíme $u_3(x, y) = h(x)\phi(y)$. Po dosadení do Laplaceovej rovnice a odseparovaní premenných dostaneme

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dy^2} = \lambda,$$

kde λ je separačná konštanta (znamienko pri λ sme zvolili tak, že v okrajovom probléme pre ϕ bude vystupovať $-\lambda$). Z okrajových podmienok $u_3(x, 0) = 0$, $u_3(x, H) = 0$ dostaneme okrajové podmienky pre ϕ , $\phi(0) = 0$ a $\phi(H) = 0$.

Pre ϕ riešime teda okrajovú úlohu

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{dy^2} &= -\lambda \phi \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(H) &= 0. \end{aligned}$$

Už vieme, že vlastné čísla takejto úlohy sú $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$ a príslušné vlastné funkcie sú $\phi_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{H}$.

Rovnica pre $h(x)$ je teraz pre každé $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \lambda_n h \tag{43}$$

pričom z okrajovej podmienky $u_3(L, y) = 0$ dostávame podmienku $h(L) = 0$.

Keďže všetky λ_n sú kladné, všeobecné riešenie uvedenej rovnice je

$$h(x) = c_1 \cosh \sqrt{\lambda_n} x + c_2 \sinh \sqrt{\lambda_n} x.$$

Aj keď v princípe je možné použiť podmienku $h(L) = 0$ na určenie vzťahu konštánt c_1 a c_2 , jednoduchší tvar riešenia dostaneme, keď si uvedomíme, že ak $h(x)$ je riešenie rovnice (43), tak aj $h(x-a)$ pre ľubovoľné reálne číslo a je riešením rovnice (43). To možno nahliadnuť použitím substitúcie $t(x) = x-a$, vtedy

$$\frac{dh(t)}{dx} = \frac{dh}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dh}{dt}$$

takže derivácie podľa x v rovnici (43) je možné beztrešne nahradiť deriváciou podľa t .

Vezmime teda riešenie v tvare

$$h(x) = c_1 \cosh \sqrt{\lambda_n}(x - L) + c_2 \sinh \sqrt{\lambda_n}(x - L).$$

Keďže $0 = h(L) = c_1 \cosh(0) + c_2 \sinh(0) = c_1$ dostávame riešenie $h_n(x) = c_n \sinh \sqrt{\lambda_n}(x - L)$ (pre každé n dostaneme inú rovnicu, a teda aj inú konštantu c_2 , tieto konštanty sme označili c_n).

Použitím princípu superpozície dostaneme riešenie $u_3(x, y)$, ktoré je kombináciou súčinných riešení $h_n(x)\phi_n(y)$

$$u_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi(x - L)}{H} \sin \frac{n\pi y}{H}$$

Na získanie koeficientov A_n použijeme poslednú podmienku $u_3(0, y) = g_1(y)$,

$$u_3(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi(-L)}{H} \sin \frac{n\pi y}{H} = g_1(y)$$

Na tento rad sa teda môžeme pozeráť ako na sínusový rad funkcie $g_1(y)$ s koeficientami $A_n \sinh \frac{n\pi(-L)}{H}$, takže

$$A_n \sinh \frac{n\pi(-L)}{H} = \frac{2}{H} \int_0^H g_1(y) \sin \frac{n\pi y}{H} dy,$$

z čoho už ľahko dopočítame A_n .

Keď už poznáme riešenie pre $u_3(x, y)$, ľahko si odvodíme tvar zvyšných riešení. Stačí si uvedomiť, aký okrajový problém budeme riešiť pre ktorú premennú a či pre druhú premennú budeme riešenie posúvať alebo nie. Takže pre $u_1(x, y)$ si všimneme, že dve homogénne okrajové podmienky máme pre premennú x , takže $\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$ a homogénna podmienka pre y je $u_1(x, H)$, takže riešenie pre h (až na násobok konštantou) je $h_n(y) = \sinh \frac{n\pi(y-H)}{L}$. Preto

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi(y - H)}{L} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

pričom

$$B_n \sinh \frac{n\pi(-H)}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

získame podobnou úvahou ako pri A_n .

Podobne

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi y}{L} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

tu $h_n(y) = \sinh \frac{n\pi y}{L}$, pretože $u_2(x, 0) = 0$ je jediná homogénna podmienka pre y v $y = 0$, takže nedochádza k posunu, a ďalej

$$C_n \sinh \frac{n\pi H}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L f_2(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

a nakoniec

$$u_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh \frac{n\pi x}{H} \sin \frac{n\pi y}{H},$$

$$D_n \sinh \frac{n\pi L}{H} = \frac{2}{H} \int_0^H g_2(y) \sin \frac{n\pi y}{H} dy$$

Podľa sa pozrieť ako bude vyzeráť riešenie Laplacovej rovnice na oblasti v tvare kruhu s polomerom a , pričom na ohraničujúcej kružnici bude dané predpísané hodnoty (t.j. fyzikálne hľadáme stacionárne rozloženie teploty v kruhu, ak máme predpísanú teplotu na ohraničujúcej kružnici).

Zadanie naznačuje, že bude výhodné použiť polárne súradnice. Riešime teda Laplacovu rovnicu v polárnych súradniciach pre $u = u(r, \theta)$ a $0 \leq r \leq a$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (44)$$

Body (a, θ) v polárnych súradniciach sú body kružnice s polomerom a , takže okrajová podmienka bude $u(a, \theta) = f(\theta)$. V polárnych súradniciach teda riešime rovnicu (44) na obdĺžniku. Potrebovali by sme teda ešte podmienky na zvyšných stranách obdĺžnika. Ak si uvedomíme, že pre dané r body (r, π) a $(r, -\pi)$ reprezentujú ten istý bod kružnice, tak teplota v týchto bodoch musí byť rovnaká a zrejme aj tepelný tok v smere θ musí byť rovnaký, čo nám dáva podmienky

$$u(r, -\pi) = u(r, \pi) \quad (45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi). \quad (46)$$

To nám naznačuje, že po separácii premenných dostaneme pre θ okrajový problém s periodickými okrajovými podmienkami.

Nakoniec ostáva strana obdĺžnika pozostávajúca z bodov s polárnymi súradnicami $(0, \theta)$, čo je pre každé θ stred kruhu. Tu môžeme predpokladať, že hodnota riešenia v strede kruhu je ohraničená (ak sa na riešenie pozeráme ako na rozloženie teploty, tak táto podmienka je rozumná) $u|(0, \theta)| < \infty$.

Keď teraz použijeme metódu separácie premenných, $u(r, \theta) = \phi(\theta)G(r)$, dostaneme po odseparovaní a zavedení separačnej konštanty

$$\frac{r}{G} \frac{d}{dr} \left(\frac{dG}{dr} \right) = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} = \lambda$$

Z okrajových podmienok (45) a (46) získame okrajové podmienky pre ϕ a tak získame okrajový problém s periodickými okrajovými podmienkami

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} &= -\lambda \phi \\ \phi(-\pi) &= \phi(\pi) \\ \frac{d\phi}{d\theta}(-\pi) &= \frac{d\phi}{d\theta}(\pi) \end{aligned}$$

ktorého vlastné hodnoty sú $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 = n^2$ pre $n = 0, 1, 2, \dots$ a vlastné funkcie sú $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ pre $n > 0$ a 1 (resp. ľubovoľná nenulová konštanta) pre $n = 0$.

Pre funkciu G dostávame rovnicu

$$\frac{r}{G} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) = \lambda_n = n^2,$$

resp. po úprave

$$r^2 \frac{d^2 G}{dr^2} + r \frac{dG}{dr} - n^2 G = 0$$

To je Eulerova rovnica, ktorej riešenie je možné nájsť v tvare $G(r) = r^p$. Po dosadení tohoto výrazu do rovnice získame rovnicu pre p a každé r

$$[p(p-1) + p - n^2]r^p = 0$$

z čoho $p^2 - n^2 = 0$, a teda $p = \pm n$ pre $n \neq 0$ a $p = 0$ pre $n = 0$.

Pre $n \neq 0$ dostávame dve lineárne nezávislé riešenia r^n a r^{-n} , a teda všeobecné riešenie pre $n > 0$ je $G(r) = c_{1,n}r^n + c_{2,n}r^{-n}$.

Pre $n = 0$ je jedno riešenie $r^0 = 1$, čiže riešením je ľubovoľná konštanta. Druhé nezávislé riešenie pre $n = 0$ dostaneme z priamo z rovnice

$$\begin{aligned}\frac{r}{G} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) &= n^2 = 0 \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) &= 0 \\ r \frac{dG}{dr} &= \bar{c}_2 \\ \frac{dG}{dr} &= \frac{\bar{c}_2}{r} \\ G &= \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \ln r.\end{aligned}$$

Máme teda

$$G(r) = \begin{cases} \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \ln r & \text{ak } n = 0 \\ c_{1,n} r^n + c_{2,n} r^{-n} & \text{ak } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Vďaka podmienke $|u(0, \theta)| < \infty$, ktorá vďaka tomu že ϕ_n sú ohraničené znamená, že $|G(r)| < \infty$, dostávame, že $c_2 = 0$ a $\bar{c}_2 = 0$, pretože v opačnom prípade by $G(r)$ bola v okolí 0 neohraničená. Čiže

$$G(r) = \begin{cases} \bar{c}_1 & \text{ak } n = 0 \\ c_{1,n} r^n & \text{ak } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Výsledné súčinové riešenie je potom

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + B_n r^n \sin n\theta$$

Zo začiatkovej podmienky potom dostaneme

$$u(a, \theta) = f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^n \cos n\theta + B_n a^n \sin n\theta$$

a rad na pravej strane je Fourierov rad pre ktorého koeficienty platia vzťahy

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

a

$$\begin{aligned}A_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \\ B_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta\end{aligned}$$

pre $n > 0$.

Príklad: Nájdite riešenie Laplaceovej rovnice zvonku kruhovej oblasti s polomerom a a hodnotami na okraji danými funkciou $u(a, \theta) = f(\theta) = \ln 2 + 4 \cos 3\theta$.

Riešenie: Daná oblasť je v polárnych súradniciach určená nerovnosťami $r \geq a$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ (načrtnite si obrázok) - je to nekonečný pás, zľava ohraničený priamkou $r = a$, zhora a zdola priamkami $\theta = \pm\pi$. Okrajová podmienka je zo zadania $u(a, \theta) = f(\theta)$. Pre horný a dolný okraj budú platiť periodické okrajové podmienky z podobných dôvodov ako v predošlej časti. Posledná podmienka bude $|u(r, \theta)| < \infty$ pre $r \rightarrow \infty$ (opäť pre prípad teploty neočakávame neohraničenosť v nekonečne). Riešime teda úlohu

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad r \geq a, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (47)$$

s okrajovými podmienkami

$$\begin{aligned} u(a, \theta) &= f(\theta) \\ u(r, -\pi) &= u(r, \pi) \\ \frac{du}{d\theta}(r, -\pi) &= \frac{du}{d\theta}(r, \pi) \\ |u(r, \theta)| &< \infty, \text{ pre } r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Po použití metódy separácie premenných $u(r, \theta) = \phi(\theta)G(r)$ dostávame pre ϕ rovnakú okrajovú úlohu ako v predošlej časti, takže máme

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \phi_n(\theta) = \begin{cases} \cos n\theta, & \text{ak } n > 0 \\ \sin n\theta, & \text{ak } n > 0 \\ 1, & \text{ak } n = 0 \end{cases}$$

Rovnica pre G bude opäť Eulerova rovnica pre $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$r^2 \frac{d^2 G}{dr^2} + r \frac{dG}{dr} - n^2 G = 0$$

Takže všeobecné riešenie je

$$G(r) = \begin{cases} \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \ln r & \text{ak } n = 0 \\ c_{1,n} r^n + c_{2,n} r^{-n} & \text{ak } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

z okrajovej podmienky $|u(r, \theta)| < \infty$ pre $r \rightarrow \infty$ dostávame podobne ako v predošlom prípade $|G(r)| < \infty$ pre $r \rightarrow \infty$. Keďže $|\ln r| \rightarrow \infty$ pre $r \rightarrow \infty$ a

ak $n > 0$ tak $r^n \rightarrow \infty$ pre $r \rightarrow \infty$ v $G(r)$ musí byť $\bar{c}_2 = 0$ a $c_1 = 0$. Takže

$$G(r) = \begin{cases} \bar{c}_1 & \text{ak } n = 0 \\ c_{2,n} r^{-n} & \text{ak } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Z toho dostávame všeobecné riešenie

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-n} \cos n\theta + B_n r^{-n} \sin n\theta$$

so začiatočnej podmienky máme

$$u(a, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^{-n} \cos n\theta + B_n a^{-n} \sin n\theta = \ln 2 + 4 \cos 3\theta$$

a vidíme, že

$$\begin{aligned} A_0 &= \ln 2, \\ A_3 a^{-3} &= 4, \text{ a } A_n = 0 \text{ pre } n \neq 3, \\ B_n &= 0, \text{ pre všetky } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Takže riešenie je

$$u(r, \theta) = \ln 2 + 4a^3 r^{-3} \cos 3\theta.$$

Veta o strednej hodnote

Uvažujme Laplacovu rovnicu

$$\nabla^2 u = 0$$

na kruhovej oblasti $r < a$, $-\pi < \phi \leq \pi$, s okrajovou podmienkou $u(a, \theta) = f(\theta)$.

V predošlej časti sme odvodili, že riešením je funkcia

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \sin n\theta$$

pričom

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \\ A_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \\ B_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta. \end{aligned}$$

Po dosadení $r = 0$ do riešenia, získame

$$u(0, \theta) = A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

Inými slovami v teplota v strede kruhu je presne priemerná teplota pozdĺž okraja kruhu.

Tento fakt platí všeobecnejšie pre ľubovoľnú oblasť R v nasledovnej forme: Ak u je riešenie $\nabla^2 u = 0$ s danými hodnotami na $f(x)$ na okraji ∂R oblasti R a bod $a_0 \in R$ je stredom kruhu D_{a_0} , ktorý celý leží v oblasti R , tak $u(a_0)$ je integrálny priemer funkcie $u(x)$ na hranici kruhu ∂D_{a_0} .

Čiže voľne povedané pre prípad stacionárneho rozloženia teploty v oblasti R , teplota v ľubovoľnom bode oblasti R je rovná priemernej teplote na ľubovoľnej kružnici so stredom v a_0 ležiacej vnútri oblasti R .

Princíp maxima

Je vlastne dôsledkom vety o strednej hodnote. Princíp maxima hovorí, že nekonštantné riešenie Laplaceovej rovnice nemôže mať maximum vnútri oblasti R . Takže nekonštantné riešenie $\nabla^2 u = 0$ má riešenie len na ∂R .

Naznačíme dôvod, prečo je to tak. Ak by v bode P z vnútra oblasti R bolo maximum riešenia, vezmime kruh D_P so stredom v bode P , ktorý celý leží v oblasti R . Keďže v hodnota riešenia v bode P je priemerom hodnôt na okraji ∂D_P , ale zároveň v P je maximálna hodnota, musí byť v celom kruhu rovnaká hodnota ako v bode P , t.j. riešenie musí byť v celom tomto kruhu konštantné. Potom ale riešenie je konštantné pozdĺž ľubovoľnej cesty medzi bodom P a ľubovoľným iným bodom oblasti R – stačí uvažovať vhodné kruhy pozdĺž cesty a pre každý zopakovať Predošlý argument. Takto ale ukážeme, že uvažované riešenie je konštantné vnútri oblasti R , čiže ak by riešenie malo maximum vnútri oblasti R , tak je nutne konštanté.

Zrejme ak u je riešenie rovnice $\nabla^2 u = 0$, tak $-u$ je tiež riešením a ak v bode P má u maximum, tak v bode P má $-u$ minimum, a teda maximum a minimum môže riešenie Laplaceovej rovnice dosahovať len na okraji oblasti.

Riešenie $\nabla^2 u$ je jednoznačné a spojitě závisí na nehomogénnych dátach

Nech u je riešenie $\nabla^2 u = 0$ na oblasti R s $u = f(x)$ na okraji oblasti a v je riešenie $\nabla^2 v = 0$ na oblasti R s $v = g(x)$ na okraji oblasti. Potom $w = u - v$ je riešením $\nabla^2 w = 0$ s $w = f(x) - g(x)$ na okraji oblasti. Z princípu maxima

(a minima) dostávame

$$\min(f(x) - g(x)) \leq w \leq \max(f(x) - g(x))$$

z čoho ľahko odvodíme, že

$$\max |w| = \max |u - v| \leq \max |f(x) - g(x)|.$$

Takže ak $\max |f(x) - g(x)| < \epsilon$, tak $\max |u - v| < \epsilon$, z čoho vidno spojitú závislosť riešenia od nehomogénnych dát (ak sa začiatkové podmienky f a g líšia len málo, tak sa málo líšia aj riešenia).

Jednoznačnosť sa ukáže podobne. Ak u a v sú riešenie Laplaceovej rovnice s okrajovou podmienkou $u = v = f(x)$ na okraji oblasti, tak funkcia $w = u - v$ je riešením Laplaceovej rovnice s okrajovou podmienkou $w = 0$ na okraji oblasti. Potom ale z princípu maxima dostávame, že $0 \leq w \leq 0$, čiže $w = 0$, a teda $u - v = 0$, z čoho $u = v$.

Podmienky riešiteľnosti

Vezmime rovnicu $\nabla^2 u = 0$ na dvojrozmernej oblasti a dvakrát ju zintegrujme. Dostaneme

$$0 = \iint_R \nabla^2 u \, dS = \iint_R \nabla \cdot (\nabla u) \, dS = \oint_{\partial R} \nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dl$$

kde $\hat{\mathbf{n}}$ je jednotkový vektor vonkajšej normály k hranici oblasti. Táto rovnosť platí práve vtedy, keď $\nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ na ∂R . Všimnime si ale, že $\phi = -K_0 \nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}}$ je tepelný tok. Takže $\nabla^2 u = 0$ má riešenie práve vtedy, keď celkový tepelný tok pozdĺž hranice je nulový.

Príklad: (Úloha, ktorej riešenie nezávisí spojite na nehomogénnych dátach)
Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

Použitím metódy separácie premenných spočítame, že riešenie je

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

s koeficientami

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Označme u' riešenie predošlej úlohy s pozmenenou začiatočnou podmienkou pre nejaké prirodzené číslo m

$$u(x, 0) = f(x) + \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{L}.$$

Potom $\max |f(x) + \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{L} - f(x)| = \frac{1}{m}$ čiže začiatočné podmienky sa pre veľké m líšia len málo.

Ak však spočítame koeficienty riešenia pre pozmenenú začiatočnú podmienku, dostaneme

$$A'_r = A_r + \begin{cases} 0, & r \neq m \\ \frac{1}{m} & r = m. \end{cases}$$

a teda riešenie pre túto začiatočnú podmienku je

$$u'(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{k(\frac{n\pi}{L})^2 t} + \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{L} e^{k(\frac{m\pi}{L})^2 t}.$$

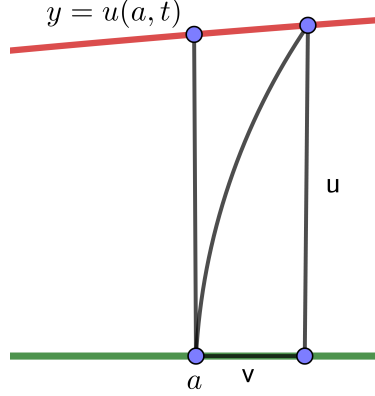
Avšak $\max |u' - u| = \max |\frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{L} e^{k(\frac{m\pi}{L})^2 t}| = \frac{1}{m} e^{k(\frac{m\pi}{L})^2 t}$ je pre veľké m (t.j. pre blízke začiatočné podmienky) veľké.

0.7 Vlnová rovnica

Odvodenie

Uvažujme natiahnutú strunu v stacionárnej pozícii s vhodne upevnenými koncami. Pre odvodenie vlnovej rovnice budeme predpokladať že sklon struny pri kmitaní bude malý. Vďaka tomu môžeme zanedbať horizontálnu zložku výchylky bodov struny. Budeme teda predpokladať, že body struny sa pohybujú vertikálne. Polohu bodu x vo vertikálnom smere v čase t označíme $y = u(x, t)$.

Vezmime malý (infinitezimálny) úsek struny medzi x a $x + \Delta x$. Nech hustota struny je $\rho_0(x)$. Hmotnosť vybraného úseku struny je potom približne $\rho_0(x)\Delta x$. Zrýchlenie je dané pôsobiacimi silami, takže použijeme Newtonov zákon $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.



Obr. 8: Pre malý sklon struny, je možné zanedbať horizontálnu zložku v premiestnenia bodu struny.

Potrebuje teda poznať sily pôsobiace na daný úsek, pričom vzhľadom na predošlú poznámku, stačí skúmať len vertikálne zložky týchto síl.

Ak predpokladáme, že struna je ideálne pružná, potom sila, ktorou pôsobí zvyšok struny na konce vybraného úseku pôsobí v smere dotýčnice k strune v týchto koncoch. Veľkosť tejto sily označíme $T(x, t)$. Ďalej označme $\theta(x, t)$ uhol, ktorý zvierá dotýčnica k strune v danom bode s vodorovnou priamkou (osou x). Pomocou tohoto uhla je potom možné získať vertikálne komponenty síl.

Ak y je výchylka bodu x struny v čase t tak smernicu dotýčnice v tomto vychýlenom bode je možné spočítať ako $\tan \theta(x, t)$, ale tiež ako $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, čiže

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan \theta(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

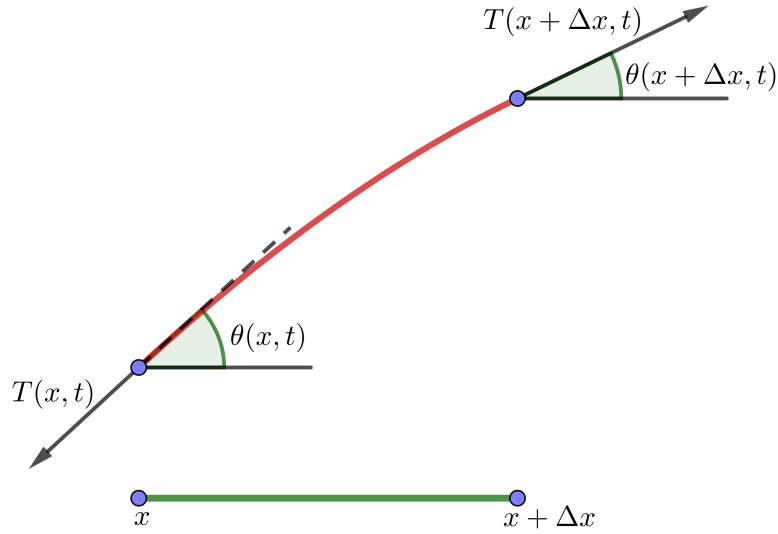
Z Newtonovho pohybového zákona dostaneme, že hmotnosť $\rho_0(x)\Delta x$ úseku vynásobená druhou deriváciou vertikálnej polohy bodu ($y = u(x, t)$) podľa času sa rovná výslednej sile pôsobiacej na úsek struny, čo sú vertikálne komponenty napätových (ťahových?) síl a vertikálne komponenty ďalších síl pôsobiacich na strunu (napríklad gravitačná sila), čiže dostávame rovnosť

$$\rho_0(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x + \Delta x, t) \sin \theta(x + \Delta x, t) - T(x, t) \sin \theta(x, t) + \rho_0(x)\Delta x Q(x, t).$$

$Q(x, t)$ označuje veľkosť vertikálneho komponentu sily pôsobiacej na jednotku hmotnosti struny.

Vydelením Δx a limitným prechodom $\Delta x \rightarrow 0$ dostaneme

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [T(x, t) \sin \theta(x, t)] + \rho_0(x) Q(x, t).$$



Obr. 9: Sily pôsobiace na krátky úsek struny. Výchylka je prehnaná kvôli zobrazeniu uhlov θ . $T(x, t)$ sú dĺžky vyznačených vektorov.

Keďže na začiatku sme predpokladali len malý sklon struny, tak

$$\sin \theta(x, t) \approx \tan \theta(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

a po nahradení v predošlej rovnosti dostávame rovnicu

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \rho_0(x) Q(x, t).$$

V prípade malých výchyliek môžeme pre ideálne pružnú strunu považovať $T(x, t)$ za konštantnú, $T(x, t) = T_0$. V tom prípade dostávame

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho_0(x) Q(x, t).$$

Ak jediná vonkajšia sila je gravitácia $Q(x, t) = -g$, pričom v prípade veľmi napnutej struny je $T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \gg -g$, takže Q môžeme v takom prípade zanedbať a dostaneme

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

resp. po vydelení $\rho_0(x)$ a položení $c^2 = T_0/\rho_0(x)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Označenie $c^2 = T_0/\rho_0(x)$ je motivované jednotkami uvedeného podielu. T_0 je sila, čiže $T_0[kg\,m\,s^{-2}]$, $\rho_0(x)[kg\,m^{-1}]$ je hustota (jednorozmerná), takže ich podiel má jednotku $[m^2\,s^{-2}]$, čo je vlastne druhá mocnina rýchlosti. V prípade homogénnej struny je hustota konštantná a teda aj c^2 je konštanta.

Okrajové podmienky

Podobne ako v prípade rovnice vedenia tepla, riešenie vlnovej rovnice bude závisieť od obmedzení daných na koncoch struny. Prvý typ okrajových podmienok sú podmienky, ktoré určujú pohyb koncov struny vo vertikálnom smere. Pre strunu dĺžky L , ktorej konce sú $x = 0$ a $x = L$ sú to

$$u(0, t) = f(t), \quad u(L, t) = g(t).$$

Pre špeciálny prípad $f(x) = g(x) = 0$ dostávame strunu s pevnými koncami.

Zaujímavejšie okrajové podmienky dostaneme, ak je koniec struny pripevnený na nejaký dynamický systém. Tento typ podmienok ilustrujeme na príklade, keď koniec struny je upevnený na mechanický oscilátor (struna-závažie, spring-mass system, S-M).

Predpokladajme, že koniec struny $x = 0$ je upevnený na závažie takého mechanického oscilátora, ktorého pohyb je viazaný vo vertikálnom smere. Dĺžku nenatiahnutej pružiny označme l a výchylku závažia (a tým pádom aj výchylku konca struny) označíme $y(t) = u(0, t)$. Potom z Hookovho zákona a Newtonovho zákona vieme, že

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k[y(t) - y_s(t) - l] + \text{ďalšie sily}, \quad (48)$$

kde m je hmotnosť závažia a $y_s(t)$ je poloha upevnenia pružiny (na opačnej strane než je závažie), ktorá sa tiež môže meniť v čase.

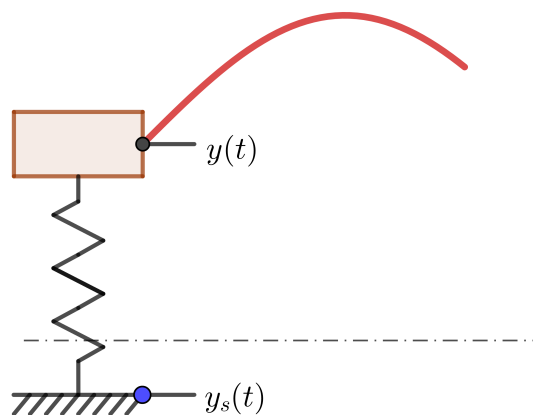
Na závažie pôsobí kmitajúca struna silou v smere dotyčnice k strune v bode $x = 0$, ktorej veľkosť vo vertikálnom smere je $T(0, t) \sin \theta(0, t)$, čo je možné v prípade malého sklonu struny na okraji opäť nahradiť

$$T(0, t) \sin \theta(0, t) \approx T_0 \tan \theta(0, t) = T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$$

Preto (48) môžeme prepísať na tvar ($y(t) = u(0, t)$)

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) = -k[u(0, t) - y_s(t) - l] + T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \text{ďalšie sily}$$

V špeciálnom prípade keď ďalšie pôsobiace sily sú nulové a závažie je dostatočne malé, takže sily pôsobiace na závažie sú v rovnováhe ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$), získame



Obr. 10: Struna upevnená na dynamický systém.

nehomogénnu elastickú podmienku

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = k(u(0, t) - u_E(t))$$

kde $u_E(t) = y_s(t) + l$ je rovnovážna poloha závažia. Ak $u_E(t) = 0$, teda rovnovážna poloha výchylky súhlasí so stacionárnou výchylkou struny, dostávame **homogénnu elastickú podmienku**

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = k u(0, t)$$

V prípade takéhoto upevnenia na druhej strane struny možno odvodiť elastické podmienky

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -k(u(L, t) - u_E(t))$$

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -k u(L, t)$$

Pri týchto podmienkach je dôležité dodržať znamienka na pravej strane (+ pre $x = 0$, - pre $x = L$).

Ďalším príkladom okrajových podmienok sú

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{alebo} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$$

Vtedy hovoríme, že príslušný koniec struny je voľný. Túto voľnosť treba chápať tak, že koniec struny sa pohybuje vo vertikálnom smere bez trenia a iných pôsobiacich síl. Tieto podmienky sa dajú chápať ako limitný prípad elastických podmienok pre $k \rightarrow 0$

Fixované okraje

Podme sa pozrieť na riešenie vlnovej rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L$$

s okrajovými podmienkami

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= 0. \end{aligned}$$

Fyzikálne to zodpovedá kmitajúcej strune s pevne upevnenými nehybnými koncami (napríklad struna na gitare prípadne husliach je celkom dobrý model). Na úplné riešenie samozrejme potrebujeme ešte začiatočnú podmienku. Pretože vychádzame z pohybovej rovnice, potrebujeme dve podmienky – začiatočnú polohu a začiatočnú rýchlosť

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x).$$

Keďže uvedená rovnica je homogénna, lineárna a rovnaké vlastnosti majú aj uvedené okrajové podmienky, môžeme použiť metódu separácie premenných $u(x, t) = \phi(x)h(t)$. Po odseparovaní a voľbe separačnej konštanty dostaneme

$$\frac{1}{c^2 h} \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\lambda$$

z okrajových podmienok potom dostávame Sturm-Liouvillov problém vlastných čísel pre ϕ

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{dx^2} &= -\lambda \phi \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0, \end{aligned}$$

ktorého vlastné čísla sú $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$ a vlastné funkcie $\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$.

Pre h potom dostávame diferenciálne rovnice

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda_n c^2 h$$

a keďže $\lambda_n > 0$ pre všetky prípustné n , všeobecným riešením je

$$h(t) = c_1 \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_2 \sin \frac{n\pi ct}{L}$$

Z princípu superpozície dostaneme riešenie vlnovej rovnice v tvare

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Koeficienty A_n a B_n získame zo začiatočných podmienok

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

čo je sínusový rad s koeficientami A_n , preto

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Z druhej začiatočnej podmienky

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

čo je opäť sínusový rad s koeficientami $B_n \frac{n\pi c}{L}$, preto

$$B_n \frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Pri pohľade na riešenie $u(x, t)$ si môžeme všimnúť, že kmitanie struny je lineárnou kombináciou jednoduchých kmitov

$$\sin \frac{n\pi x}{L} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right)$$

Tieto kmity nazývame **normálne módy**. Ich amplitúdu vieme spočítať ako $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$. Ak fixujeme jeden vnútorný bod struny a všimneme časovú časť, tak si môžeme uvedomiť, že každý bod struny vykonáva jednoduchý kmitavý pohyb s **kruhovou frekvenciou** (kruhovú frekvenciu je počet kmitov za 2π jednotiek času) $\frac{n\pi c}{L}$, teda frekvencia kmitov je $\frac{nc}{2L}$ (vydeľte kruhovú frekvenciu číslom 2π). Tieto frekvencie nazývame **prirodzené frekvencie** (tzv. harmonické).

Pre $n = 1$ dostávame základnú frekvenciu, ktorej kruhová frekvencia je $\frac{c\pi}{L}$.

Pri aplikácii vyššie uvedených faktov pre prípad struny na gitare (husliach, prípadne iných strunových nástrojoch) máme, že základná frekvencia určuje základnú výšku tónu. Vyššie harmonické majú vplyv na farbu tónu. Tiež si môžeme všimnúť, že frekvenciu kmitov, a tým pádom výšku tónu môžeme meniť v princípe dvoma spôsobmi. Jedna je zmena konštanty $c = \sqrt{T_0/\rho_0}$ a keďže hustotu struny zmeníme ťažko, tak konštantu c v princípe meníme napínaním struny. Týmto spôsobom zvyčajne nástroj ladíme. Druhá možnosť je predlžovaním alebo skracovaním struny, čomu na nástroji zodpovedá samotné hranie, keď strunu skracujeme použitím prstov. Podobné princípy fungujú aj pre dychové nástroje, kde zvyčajne kmitá stĺpec vzduchu.

0.8 Viacrozmerná vlnová rovnica

Kmitajúca membrána

Nech $u = u(x, y, t)$. Vlnová rovnica v 2D má tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Fyzikálne opisuje kmitanie tenkej, vhodne upevnenej membrány. Spôsob upevnenia je určený okrajovými podmienkami. V tejto časti sa pozrieme na prípad membrány obdĺžnikového tvaru, s nepohyblivými stranami,

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0, & u(x, 0, t) &= 0 \\ u(L, y, t) &= 0, & u(x, H, t) &= 0. \end{aligned}$$

a začiatočnou polohou a rýchlosťou

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \alpha(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= \beta(x, y). \end{aligned}$$

Keďže rovnica je lineárna a homogénna rovnako ako aj okrajové podmienky, použijeme metódu separácie premenných, $u(x, y, t) = \phi(x, y)h(t)$. Po odseparovaní voľbe separačnej konštanty dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h}{dt^2} &= -\lambda c^2 h \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= -\lambda \phi \end{aligned}$$

s okrajovými podmienkami pre ϕ

$$\begin{aligned}\phi(0, y) &= 0, & \phi(x, 0) &= 0 \\ \phi(L, y) &= 0, & \phi(x, H) &= 0\end{aligned}$$

Na rovnicu pre ϕ je možné opäť aplikovať metódu separácie premenných s $\phi(x, y) = f(x)g(y)$ a separačnou konštantou μ . Po odseparovaní dostaneme rovnice

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\mu f$$

s okrajovými podmienkami

$$f(0) = 0 \qquad f(L) = 0$$

a

$$\frac{d^2 g}{dy^2} = -(\lambda - \mu)g$$

s okrajovými podmienkami

$$g(0) = 0 \qquad g(H) = 0.$$

Rovnica pre f je klasický S-L okrajový problém, takže vieme, že f a μ sú

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (49)$$

$$f_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (50)$$

Pre každé prípustné n je potom rovnica pre g tiež S-L okrajový problém s vlastnými číslami $\lambda - \mu_n$. Takže pre g dostávame

$$\begin{aligned}\lambda_{mn} - \mu_n &= \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ g_m(y) &= \sin \frac{m\pi y}{H}.\end{aligned}$$

potom

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2.$$

Z rovnice pre h vďaka tomu, že $\lambda_{mn} > 0$ dostávame riešenie

$$h(t) = c_1 \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t + c_2 \sin c\sqrt{\lambda_{mn}}t.$$

Potom výsledné riešenie je

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H} \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H} \sin c\sqrt{\lambda_{mn}}t$$

zo začiatočnej podmienky

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \frac{m\pi y}{H} = \alpha(x, y)$$

dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{2}{H} \int_0^H \alpha(x, y) \sin \frac{m\pi y}{H} dy$$

a preto

$$A_{mn} = \frac{2}{L} \int_0^L \left[\frac{2}{H} \int_0^H \alpha(x, y) \sin \frac{m\pi y}{H} dy \right] \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ = \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H \alpha(x, y) \sin \frac{m\pi y}{H} \sin \frac{n\pi x}{L} dy dx$$

Analogickým postupom využitím druhej začiatočnej podmienky získame vzťah pre koeficienty B_{mn}

$$c\sqrt{\lambda_{mn}}B_{mn} = \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H \beta(x, y) \sin \frac{m\pi y}{H} \sin \frac{n\pi x}{L} dy dx$$

Z tvaru $u(x, y, t)$ získame podobne a v jednorozmernom prípade módy vibrácií

$$\left(A_{mn} \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t + B_{mn} \sin c\sqrt{\lambda_{mn}}t \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H}.$$

Uzlové krivky módu sú množiny bodov, ktoré nekmitajú. Z predpisu pre mód vidno, že sú to body (x, y) , pre ktoré $\sin \frac{n\pi x}{L} = 0$ a $\sin \frac{m\pi y}{H} = 0$. Pre prípad obdĺžnikovej membrány sú uzlové krivky úsečky rovnobežné so stranami obdĺžnika, ktoré rozdeľujú obdĺžnik na n častí vo vodorovnom smere a m častí vo zvislom smere.

V predchádzajúcom riešení sme videli, že výraz

$$\sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H}$$

je riešením rovnice

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\lambda \phi$$

s príslušnými nulovými okrajovými podmienkami. V kompaktnejšej forme (a všeobecnejšej forme) sa táto rovnica dá napísať v tvare

$$\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0$$

a nazýva sa Helmholtzova rovnica. Okrajové podmienky majú pre oblasť R v rovine tvar

$$a\phi + b\nabla\phi \cdot \hat{n} = 0$$

Vlastnosti riešení Helmholtzovej rovnice majú vlastnosti podobné S-L rovnici

1. Všetky vlastné hodnoty sú reálne,
2. Existuje nekonečne veľa vlastných hodnôt, pričom existuje najmenšia a neexistuje najväčšia vlastná hodnota.
3. K jednej vlastnej hodnote môže prislúchať viac vlastných funkcií (rozdiel oproti S-L)
4. Vlastnými funkciami môžeme reprezentovať ľubovoľnú po častiach hladkú funkciu v zmysle

$$f(x, y) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \phi_{\lambda}(x, y)$$

pričom v bodoch nespojitosti rad konverguje k priemeru limít zľava a sprava.

5. Vlastné funkcie prislúchajúce rôznym vlastným hodnotám sú ortogonálne s váhou $\sigma = 1$.

$$\iint_R \phi_{\lambda_1} \phi_{\lambda_2} dx dy = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Navyše rôzne vlastné funkcie prislúchajúce tej istej vlastnej hodnote je možné ortogonalizovať. Takže systém všetkých vlastných funkcií môžeme považovať za ortogonálny systém funkcií.

6. Vzťah medzi vlastnou hodnotou λ a k nej prislúchajúcou vlastnou funkciou je určený Raileigho kvocientom, ktorý v 2D je

$$\lambda = \frac{-\oint_{\partial R} \phi \nabla \phi \cdot \hat{n} ds + \iint_R |\nabla \phi|^2 dx dy}{\iint_R \phi^2 dx dy}$$

Priamym dôsledkom 6. pre $\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0$ s $\phi = 0$ na celej hranici oblasti R je že $\lambda > 0$.

V nami počítanom prípade máme

1. $\lambda_{mn} = \lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2$ sú reálne pre každé m a n .
2. Máme nekonečne veľa λ_{mn} , najmenšia je λ_{11}
3. $\lambda_{41} = \lambda_{22}$ a

$$\sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{4\pi y}{H} \neq \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{H}$$

5. Dôsledkom je možnosť vyjadrenia koeficientov v riešení

$$f = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \phi_{\lambda}$$

priamo ako dvojné integrály

$$\iint_R f \phi_{\lambda_i} dx dy = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \iint_R \phi_{\lambda} \phi_{\lambda_i} = a_{\lambda_i} \iint_R \phi_{\lambda_i}^2 dx dy$$

Kmitanie kruhovej membrány

V tomto prípade uvažujeme vlnovú rovnicu na kruhu s polomerom a , takže bude výhodné použiť polárne súradnice. Postup je veľmi podobný riešeniu rovnice vedenia tepla na kruhovej oblasti, takže výklad trochu urýchlime.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

s okrajovou podmienkou

$$u(a, \theta, t) = 0,$$

a začiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} u(r, \theta, 0) &= \alpha(r, \theta) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) &= \beta(r, \theta). \end{aligned}$$

Po separácii $u(r, \theta, t) = \phi(r, \theta)h(t)$ dostaneme opäť rovnice

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h$$

a Helmholtzovu rovnicu v polárnom tvare

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \lambda \phi = 0.$$

Použijeme ďalšiu separáciu $\phi(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ so separačnou konštantou μ , z ktorej odvodíme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{d\theta^2} &= -\mu g, \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + (\lambda r^2 - \mu) f &= 0 \end{aligned}$$

Pre rovnicu pre g podobnou úvahou ako pri riešení rovnice vedenia tepla získame periodické okrajové podmienky

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= g(\pi) \\ \frac{dg}{d\theta}(-\pi) &= \frac{dg}{d\theta}(\pi) \end{aligned}$$

Jednu okrajovú podmienku pre f máme z podmienky, že na ohraničujúcej kružnici je hodnota $u(a, \theta, t)$ nulová, a preto $f(a) = 0$. Druhú okrajovú podmienku možno zvoliť ako $|f(r)| < \infty$ z fyzikálnych dôvodov.

Potom rovnica z pre g s danými okrajovými podmienkami máme

$$\begin{aligned} \mu_m &= m^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ g_m(\theta) &= \begin{cases} \sin m\theta, \\ \cos m\theta \end{cases} \end{aligned}$$

Rovnicu pre f je možné transformovať na Besselovu rovnicu rádu m

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + (z^2 - m^2) f = 0, \quad z = \sqrt{\lambda} r$$

z ktorej získame riešenia pre f

$$f(r) = c_1 J_m(\sqrt{\lambda} r) + c_2 Y_m(\sqrt{\lambda} r).$$

Keďže $|f(r)| < \infty$ a Y_m je neohraničená (J_m je ohraničená), tak $f(r) = c_1 J_m(\sqrt{\lambda}r)$. Z okrajovej podmienky $f(a) = 0$ potom máme, že

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{z_{mn}}{a}\right)^2$$

kde z_{mn} je n -tá nula funkcie $J_m(z)$.

Všeobecné riešenie pre h je opäť

$$h(t) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}ct + c_2 \sin \sqrt{\lambda}ct.$$

Kruhovo symetrický prípad

Hľadáme riešenie vlnovej rovnice na kruhovej oblasti, ktoré nezávisí od uhla θ , $u = u(r, t)$. Potom príslušná parciálna diferenciálna rovnica bude mať v polárnych súradniciach tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

Ako okrajovú podmienku opäť vezmeme $u(a, t) = 0$, t.j. membrána je upevnená na okraji. Začiatočné podmienky sú $u(r, 0) = \alpha(r)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = \beta(r)$.

Metódou separácie premenných s $u(r, t) = \phi(r)h(t)$ získame rovnice

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 t,$$

a

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) + \lambda r \phi = 0$$

s okrajovou podmienkou $\phi(a) = 0$ (a $|\phi(0)| = 0$) z teórie S-L rovníc je známe, že pre tento okrajový problém je $\lambda > 0$, takže substitúciou $\sqrt{\lambda}r = z$ získame rovnicu Besselovu rovnicu rádu 0

$$z^2 \frac{d^2 \phi}{dz^2} + z \frac{d\phi}{dz} + z^2 \phi = 0.$$

Preto všeobecné riešenie pre ϕ je

$$\phi(r) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}r) + c_2 Y_0(\sqrt{\lambda}r)$$

z ohraničenosti ϕ v $r = 0$ dostávame $c_2 = 0$. Preto $\phi(r) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}r)$.

Z okrajovej podmienky $\phi(a) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}a) = 0$ dostávame, že $\lambda_n = \left(\frac{z_n}{a}\right)^2$, kde z_n je n -tá nula funkcie $J_0(z)$.

Výsledné riešenie vlnovej rovnice je potom

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{\lambda_n} r) \cos c\sqrt{\lambda_n} t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\sqrt{\lambda_n} r) \sin c\sqrt{\lambda_n} t$$

Zo začiatočných podmienok potom získame hodnoty A_n a B_n s využitím ortogonalít Besselových funkcií s váhou r

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{\lambda_n} r) = \alpha(r),$$

preto

$$A_n = \frac{\int_0^a \alpha(r) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) r dr}{\int_0^a J_0(\sqrt{\lambda_n} r)^2 r dr}$$

a

$$c\sqrt{\lambda_n} B_n = \frac{\int_0^a \beta(r) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) r dr}{\int_0^a J_0(\sqrt{\lambda_n} r)^2 r dr}$$

0.9 Numerické metódy

V predošlých častiach sme videli použitie metódy separácie premenných na hľadanie riešení niektorých PDR na geometricky pomerne jednoduchých oblastiach. V prípade, že oblasť v ktorej hľadáme riešenie je zložitejšia táto metóda nie je veľmi použiteľná. V zložitejších prípadoch sa preto používajú numerické metódy hľadania riešení PDR. Predstavíme si dve základné – metódu konečných diferencií a metódu konečných prvkov.

Metóda konečných diferencií

Myšlienka metódy konečných diferencií vychádza z aproximácie derivácie diferenciami. Definičný obor funkcie rozdelíme na konečný počet úsekov (zvyčajne) rovnakej dĺžky Δx . Existuje viacero spôsobov ako aproximovať deriváciu diferenciami:

1. Dopredná diferencia

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2. Spätná diferencia

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

3. Centrovaná diferencia (v princípe aritmetický priemer doprednej a spätnej diferencie)

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

V prípade derivácií vyšších rádov s využitím aproximácií pre $f'(x_0 + \Delta x)$ a $f'(x_0 - \Delta x)$ vieme získať aproximáciu druhej derivácie

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2}.$$

Podobne môžeme aproximovať aj parciálne derivácie, napríklad pre funkciu dvoch premenných $u(x, y)$ a centrovanú diferenciu dostávame.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &\approx \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0 - \Delta x, y_0)}{2\Delta x} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &\approx \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 - \Delta y)}{2\Delta y} \end{aligned}$$

S využitím aproximácie druhej derivácie vieme potom aproximovať aj Laplacov operátor aplikovaný na funkciu $u(x, y)$

$$\begin{aligned} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\approx \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - \Delta x, y_0)}{(\Delta x)^2} \\ &+ \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 - \Delta y)}{(\Delta y)^2} \end{aligned}$$

V prípade, že $\Delta x = \Delta y$, uvedenú aproximáciu možno prepísať na tvar

$$\nabla^2 u \approx \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + u(x_0 - \Delta x, y_0) + u(x_0, y_0 + \Delta y) + u(x_0, y_0 - \Delta y) - 4u(x_0, y_0)}{(\Delta x)^2}$$

Princíp použitia na riešenie PDR je v princípe jednoduchý. Derivácie sa nahradia diferenciami, a namiesto parciálnej diferenciálnej rovnice dostaneme parciálnu diferenčnú rovnicu. Z nej potom odvodíme numerickú schému. Postup si ukážeme na príklade jednorozmernej rovnice vedenia tepla na intervale

$(0, L)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= f(x).\end{aligned}$$

Keďže u je funkcia dvoch nezávislých premenných x a t , zvolíme dĺžku delenia Δx a Δt aj pre x aj pre t . Zrejme by sme chceli Δx a Δt čo najmenšie avšak uvidíme, že voľba príliš malých hodnôt pre dĺžky úsekov môže spôsobiť neprimerané predĺženie doby výpočtu.

Ak použijeme doprednú diferenciu na aproximáciu časovej derivácie, parciálnu diferenciálnu rovnicu aproximujeme

$$\frac{u(x_0, t_0 + \Delta t) - u(x_0, t_0)}{\Delta t} \approx k \frac{u(x_0 + \Delta x, t_0) - 2u(x_0, t_0) + u(x_0 - \Delta x, t_0)}{\Delta x} \quad (51)$$

Ak rozdelíme interval $(0, L)$ rovnomerne na N rovnakých úsekov, hodnota Δx bude

$$\Delta x = \frac{L}{N}.$$

Označme potom $x_j = j\Delta x$.

Vývoj teploty budeme počítat v nejakom časovom úseku, ktorý tiež diskretizujeme, t.j. budeme počítat teplotu v konkrétnych časoch $t_m = m\Delta t$. Budú nás teda zaujímať hodnoty $u(x_j, t_m)$. Označme $u(x_j, t_m) = u_j^{(m)}$. Potom ak prepíšeme (51) v novom značení a nahradíme $\approx$ symbolom $=$, dostaneme parciálnu diferenčnú rovnicu

$$\frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}}{\Delta t} = k \frac{u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}}{\Delta x}$$

a začiatočnú podmienku a okrajové podmienky môžeme prepísať ako

$$\begin{aligned}u_j^{(0)} &= f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \\ u_0^{(m)} &= 0, \text{ pre každé } m \\ u_N^{(m)} &= 0, \text{ pre každé } m.\end{aligned}$$

V diferenčnej rovnici si môžeme všimnúť, že hodnotu teploty v čase t_{m+1} v bode x_j vieme spočítať z hodnôt teplôt v čase t v bodoch x_{j-1} , x_j a x_{j+1} , teda po úprave

$$\begin{aligned}
u_j^{(m+1)} &= u_j^{(m)} + s(u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}) \\
&= su_{j-1}^{(m)} + (1 - 2s)u_j^{(m)} + su_{j+1}^{(m)},
\end{aligned} \tag{52}$$

pričom

$$s = k \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{53}$$

Z toho potom dostávame, že

$$\Delta t = \frac{s(\Delta x)^2}{k},$$

čiže hodnota parametra s určuje dĺžku úseku delenia časovej premennej. V prípade nami získanej schémy musí $s \leq \frac{1}{2}$, v opačnom prípade je schéma nestabilná a nezískame riešenie. Taktiež si môžeme všimnúť, že Δt závisí priamo úmerne od druhej mocniny Δx . Takže ak máme husté delenie priestorovej premennej, potrebujeme zvoliť Δt veľmi malé, napríklad pre $\Delta x = 0,001$ je $\Delta t = 0,000001s/k$ takže aby sme získali rozumné riešenie, daný časový úsek budeme musieť rozdeliť na veľmi veľa častí, čo spomaľuje výpočet

Vyjadrenie (52) umožňuje vytvoriť maticovú reprezentáciu uvedenej schémy. Ak vytvoríme stĺpcový vektor z hodnôt $u_j^{(m)}$, $j = 1, \dots, N-1$ ako stĺpcový vektor $U^{(m)}$, potom stĺpcový vektor $U^{(m+1)}$ s hodnotami $u_j^{(m+1)}$, $j = 1, \dots, N-1$ dostaneme vynásobením prvého vektora štvorcovou trojdiagonálnou maticou, s $1 - 2s$ na diagonále a s nad a pod diagonálou.

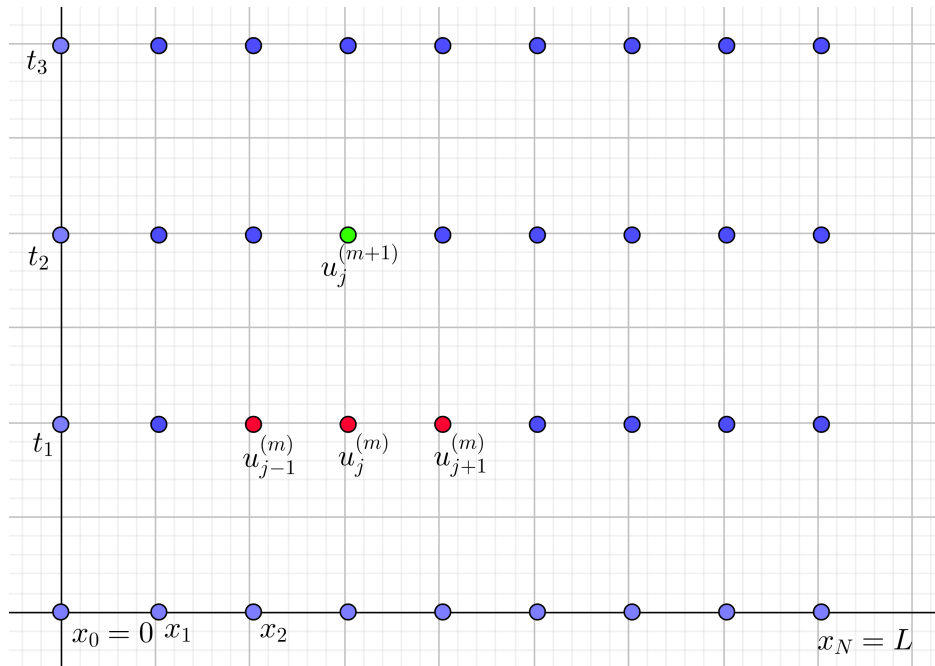
$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2s & s & 0 & \cdots & 0 \\ s & 1 - 2s & s & \cdots & 0 \\ 0 & s & 1 - 2s & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s & 1 - 2s \end{pmatrix}$$

Potom riešenie v každom (diskrétnom) čase je možné nájsť pohodlne pomocou násobenia uvedenou maticou

$$U^{(1)} = AU^{(0)}, \quad U^{(2)} = AU^{(1)} = A^2U^{(0)}, \dots$$

Vyššie sme spomenuli, že nevýhodou tejto schémy je nestabilita pri zlej voľbe s (resp. Δt). Jednou zo schém, ktoré týmto neduhom netrpia je Crankova-Nicholsonova schéma, ktorá má tvar

$$\frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}}{\Delta t} = \frac{k}{2} \left[\frac{u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{j+1}^{(m+1)} - 2u_j^{(m+1)} + u_{j-1}^{(m+1)}}{(\Delta x)^2} \right]$$



Obr. 11: Hodnota $u_j^{(m+1)}$ sa spočíta ako vhodná kombinácia hodnôt $u_{j-1}^{(m)}$, $u_j^{(m)}$, $u_{j+1}^{(m)}$, teda ak poznáme hodnotu teploty v čase t_m pre tri susedné body, vieme spočítať teplotu v čase t_{m+1} pre jeden bod.

Ak tu označíme opäť $s = k\Delta t/(\Delta x)^2$ tak táto schéma je stabilná pre každé s . Nevýhodou je zložitejší výpočet, pretože na získanie hodnôt v čase t_{m+1} je nutné počítat systém lineárnych rovníc

0.10 Numerické metódy

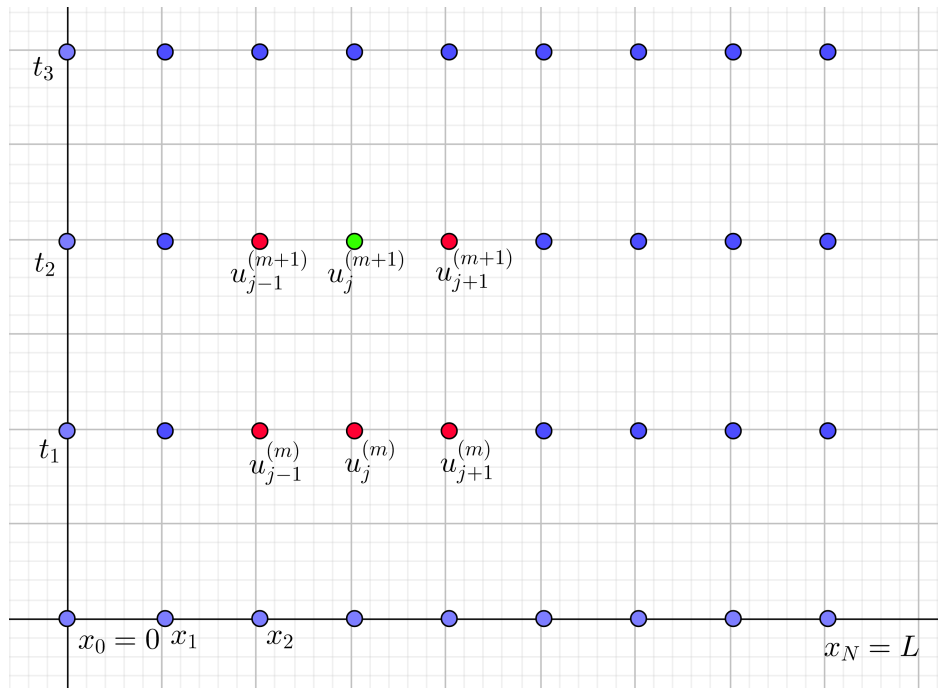
Metóda konečných prvkov

Pri metóde konečných prvkov hľadáme aproximáciu riešenia použitím kombinácie konečného počtu funkcií. Uvedenú metódu si predstavíme na príklade Poissonovej rovnice s neznámou funkciou $u = u(x, y)$.

$$\nabla^2 u = f(x, y)$$

pričom $u = 0$ na hranici nejakej dopredu danej oblasti.

Zvolíme si konečný počet tzv. testovacích funkcií $T_j(x, y)$ (to, ako voliť testovacie funkcie si ukážeme neskôr), ktoré spĺňajú okrajovú podmienku a



Obr. 12: Na výpočet hodnoty $u_j^{(m+1)}$ (zelený bod) je potrebné poznať hodnoty v červených bodoch. Keďže ale hodnoty v čase t_{m+1} nepoznáme, z tejto schémy získame $N - 2$ rovníc s $N - 2$ neznámymi (okrajové podmienky v x_0 a x_N poznáme, preto $N - 2$) a ich riešením získame hodnoty u v čase t_{m+1} .

riešenie budeme hľadať v tvare

$$U(x, y) = \sum_{j=1}^n U_j T_j(x, y),$$

kde U_j sú zatiaľ neznáme reálne čísla. Zrejme takto zvolené "riešenie" nemôžeme jednoducho dosadiť do pôvodnej rovnice. Pôvodnú rovnicu najskôr transformujeme na tvar, ktorý sa nazýva slabá forma PDR. Princíp transformácie je nasledovný.

Pôvodnú rovnicu prenásobíme testovacou funkciou a zintegrujeme

$$\nabla^2 u T_j = f(x, y) T_j \quad (54)$$

$$\iint_R \nabla^2 u T_j dA = \iint_R f(x, y) T_j dA \quad (55)$$

Zo vzťahu

$$\nabla \cdot (T_i \nabla u) = T_i \nabla^2 u + \nabla T_i \cdot \nabla u$$

vyjadríme $T_i \nabla^2 u$ a dosadíme do (55)

$$\iint_R \nabla \cdot (T_i \nabla u) - \nabla T_i \cdot \nabla u \, dA = \iint_R f(x, y) T_i \, dA \quad (56)$$

Využitím Greenovej vety

$$\iint_R \nabla \cdot B \, dA = \oint_{\partial R} B \cdot \mathbf{n} \, ds$$

môžeme ľavú stranu (56) napísať ako

$$\oint_{\partial R} T_i \nabla u \cdot \mathbf{n} \, ds - \iint_R \nabla T_i \cdot \nabla u \, dA = \iint_R f T_i \, dA$$

a keďže T_j sú nulové na hranici oblasti (okrajová podmienka), krivkový integrál na ľavej strane bude nulový a výsledná slabá forma danej PDR bude

$$\iint_R \nabla T_i \cdot \nabla u \, dA = - \iint_R f T_i \, dA.$$

Zrejme ak u je riešením pôvodnej Poissonovej rovnice, tak je aj riešením slabej formy. Ak však teraz dosadíme $u = U$ do slabej formy, dostaneme po krátkej úprave

$$\sum_{j=1}^n U_j \iint_R \nabla T_i \cdot \nabla T_j \, dA = - \iint_R f T_i \, dA \quad (57)$$

V tomto poslednom výraze poznáme T_i , T_j a f , nezáme sú čísla U_j . Označme

$$K_{ij} = \iint_R \nabla T_i \cdot \nabla T_j \, dA$$

$$F_i = - \iint_R f T_i \, dA$$

Potom čísla K_{ij} definujú maticu $K = (K_{ij})$ (tzv. matica tuhosti – stiffness matrix) a ak $F = (F_i)$ je vektor pozostávajúci z čísel F_i a $U = (U_i)$, tak (57) je možné zapísať v maticovom tvare jednoducho ako

$$KU = F.$$

Riešením tejto maticovej rovnice získame hodnoty U_i .

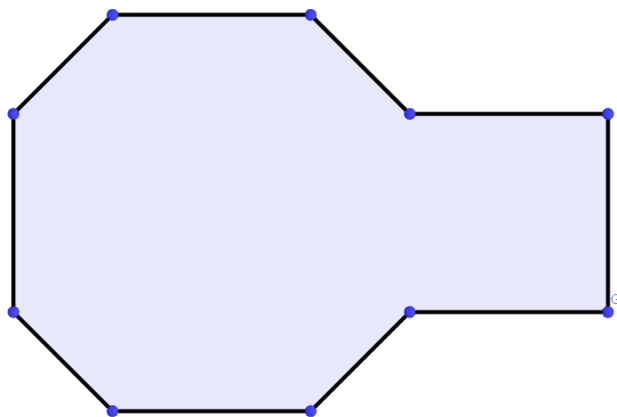
Ostáva vyriešiť otázku voľby testovacích funkcií. Ak by sme poznali ortogonálne vlastné funkcie ϕ_i

$$\nabla^2 \phi_i = \lambda_i \phi_i,$$

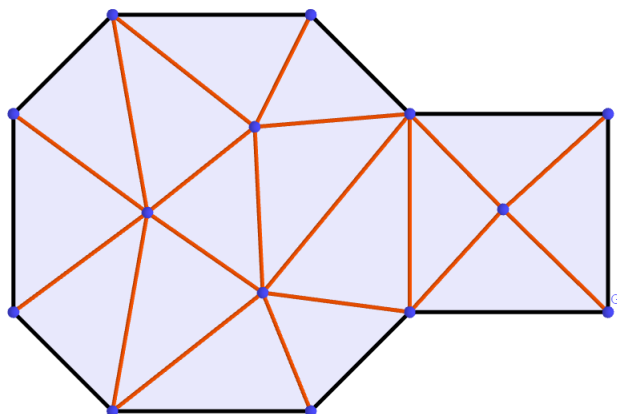
V tomto prípade pre $i \neq j$ je $K_{ij} = 0$ a matica K je preto diagonálna. V takom prípade je potom jednoduché získať U_i : $U_i = F_i/K_{ii}$.

Vlastné funkcie však pre všeobecnú oblasť poznáme málokedy.

Ukážku voľby testovacích funkcií si predvedieme na oblasti z obrázka 13 a naše zadanie (0 na okraji). Danú oblasť najskôr triangulizujeme (rozdelíme na trojuholníky, obr. 14). Testovacie funkcie potom zvolíme tak, že v i -tom vnútornom bode, ktorý je vrcholom trojuholníka bude testovacia funkcia mať hodnotu 1, v ostatných vnútorných bodoch, ktoré sú vrcholmi trojuholníka bude mať hodnotu 0 a zvyšné hodnoty sa doplnia tak, aby graf tvorili časti rovín (trojuholníky) určené príslušnými susednými tromi bodmi (obr. 15)

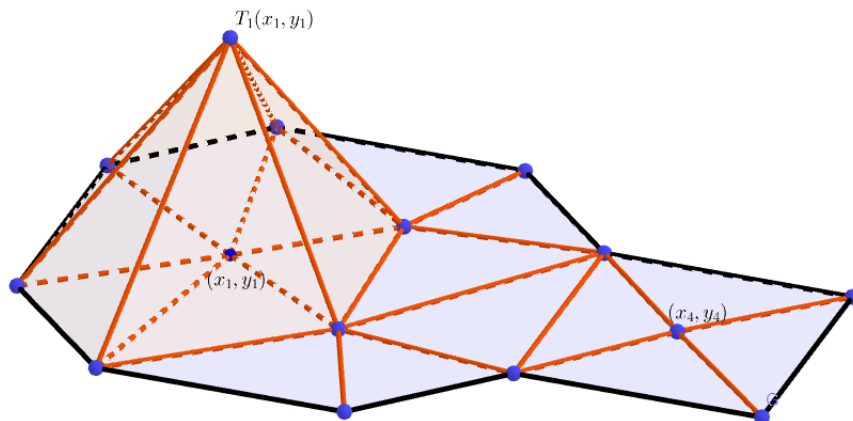


Obr. 13: Oblasť riešenia



Obr. 14: Triangulizácia oblasti riešenia

Výhodou tejto voľby je, že ak body (x_i, y_i) a (x_j, y_j) nie sú susedné (nie sú



Obr. 15: Príklad testovacej funkcie $T_1(x_1, y_1)$

spojené hranou), súčin príslušných, vyššie uvedeným spôsobom vytvorených testovacích funkcií bude 0 a na príslušnom mieste matice K bude 0. Pri veľmi hustej triangulácii bude teda väčšina prvkov matice K rovná 0.

0.11 Komplexné funkcie

Komplexná funkcia je funkcia ktorej definičný obor a obor hodnôt su (pod)množiny komplexných čísel. Pre $S \subset \mathbb{C}$, $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ označuje funkciu z podmnožiny komplexných čísel S do množiny komplexných čísel $\mathbb{C}$.

Príklad: Funkcia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$.

Mnoho vlastností funkcií ostáva rovnakých ako v prípade reálnych funkcií, podobne ako výpočet limit a derivácií funkcií.

Funkciu $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ nazývame komplexne diferencovateľnou v bode z_0 , ak existuje limita

$$\frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

f je komplexne diferencovateľná na množine S ak je komplexne diferencovateľná v každom bode množiny S . Bod, v ktorom funkcia nie je diferencovateľná sa nazýva singulárny bod.

Príklad: Derivácia funkcie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ podľa premennej z je

$\frac{df}{dz} = 2z$. Podobne, ak by $f(z) = e^{z^2}$, tak $\frac{df}{dz} = 2ze^{z^2}$.

Na komplexné funkcie je niekedy výhodné nazerať nasledovným spôsobom.

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

kde u a v sú už reálne funkcie dvoch reálnych premenných.