Domáca úloha 5

1. Nájdite riešenie Laplaceovej rovnice na obdĺžnikovej oblasti $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq H$ s nasledovnými okrajovými podmienkami $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = g(y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, H) = 0$.

Riešenie: Riešime rovnicu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Položme $u(x, y) = \Phi(y)h(x)$. Po odseparovaní premenných dostaneme

$$\frac{1}{h}\frac{d^2h}{dx^2} = -\frac{1}{\phi}\frac{d^2\Phi}{dy^2}$$

Z okrajových podmienok vidíme, že okrajový problém dostaneme pre Φ, s okrajovými podmienkami $\phi(0) = 0$ a $\phi(H) = 0$. Zvolíme preto separačnú konštantu λ tak, že

$$\frac{1}{h}\frac{d^2h}{dx^2} = -\frac{1}{\phi}\frac{d^2\Phi}{dy^2} = \lambda$$

Riešme okrajový problém pre Φ.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dy^2} &= -\lambda\phi \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(H) &= 0. \end{aligned}$$

Už vieme, že pre tento problém sú vlastné funkcie $\Phi_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{H}$ a vlastné hodnoty $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. (T.j. $\lambda_n > 0$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$.)

Rovnica pre h (a každé $n = 1, 2, 3, \ldots$) je

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \lambda_n h.$$

Keďže $\lambda_n > 0$ pre každé prípustné n, všeobecné riešenie tejto rovnice je

$$h(x) = c_1 \cosh\frac{n\pi x}{H} + c_2 \sinh\frac{n\pi x}{H}.$$

Z homogénnej podmienky $\frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0$ dostaneme $\frac{\partial h}{\partial x}(L) = 0$ a tiež vidíme, že o niečo výhodnejšie bude brať všeobecné riešenie v tvare (chceme totiž dosadiť L tak, aby niektorá z konštánt c_1, c_2 sa vo výslednom vyjadrení nevyskytovala).

$$h(x) = c_1 \cosh \frac{n\pi(x-L)}{H} + c_2 \sinh \frac{n\pi(x-L)}{H}.$$

Potom

$$\frac{dh}{dx} = c_1 \frac{n\pi}{H} \sinh \frac{n\pi(x-L)}{H} + c_2 \frac{n\pi}{H} \cosh \frac{n\pi(x-L)}{H}$$

a

$$\frac{dh}{dx}(L) = c_2 \frac{n\pi}{H} = 0,$$

z čoho máme $c_2 = 0$, lebo $\frac{n\pi}{H} \neq 0$ pre všetky prípustné n. Takže riešenie pre h je

$$h(x) = c_1 \cosh \frac{n\pi(x-L)}{H}.$$

Takže riešenie u je kombináciou príslušných súčinových riešení

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh \frac{n\pi(x-L)}{H} \sin \frac{n\pi y}{H}.$$

Koeficienty A_n získame z nehomogénnej podmienky

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{H} \sinh \frac{n\pi(x-L)}{H} \sin \frac{n\pi y}{H}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{H} \sinh \frac{n\pi(-L)}{H} \sin \frac{n\pi y}{H},$$

čo je sínusový rad, takže pre jeho koeficienty platí

$$A_n \frac{n\pi}{H} \sinh \frac{n\pi(-L)}{H} = \frac{2}{H} \int_0^H g(y) \sin \frac{n\pi y}{H} \, dy.$$

z čoho

$$A_n = \frac{2}{n\pi \sinh(n\pi(-L)/H)} \int_0^H g(y) \sin \frac{n\pi y}{H} \, dy.$$

Riešením Laplacovej rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 \le x \le L, 0 \le y \le H,$$

s okrajovými podmienkami

$$u(x, H) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = g(y),$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0.$$

je funkcia

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh \frac{n\pi(x - L)}{H} \sin \frac{n\pi y}{H},$$

pričom

$$A_n = \frac{2}{n\pi \sinh(n\pi(-L)/H)} \int_0^H g(y) \sin \frac{n\pi y}{H}\, dy.$$