Domáca úloha 4

1. Uvažujme rovnicu vedenia tepla

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t) \qquad\qquad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

   Ukážte, že všobecné riešenie Fourierovej transformácie riešenia $\overline{U}$ je

$$\overline{U}(\omega,t) = c(\omega)e^{-k\omega^2 t} + e^{-k\omega^2 t}\int_0^{\tau} \overline{Q}(\omega,\tau)e^{k\omega^2\tau}\,d\tau.$$

   Určte $c(\omega)$ a zapíšte riešenie $u(x,t)$ tak, aby v ňom vystupovali funkcie $f(x)$ a $Q(x,t)$ a nie ich Fourierove transformácie.

   Návod: (a) Ak $F(\omega,\alpha)$ je Fourierova transformácia funkcie $f(x,\alpha)$, tak

$$\mathcal{F}\left[\int f(x,\alpha)\,d\alpha\right] = \int F(\omega,\alpha)\,d\alpha.$$

   (b) Veta o konvolúcii.