Domáca úloha 4 - Riešenie

1. Uvažujme rovnicu vedenia tepla

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t) \qquad\qquad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

Ukážte, že všobecné riešenie Fourierovej transformácie riešenia $\overline{U}$ je

$$\overline{U}(\omega,t) = c(\omega)e^{-k\omega^2 t} + e^{-k\omega^2 t}\int_0^t \overline{Q}(\omega,\tau)e^{k\omega^2\tau}\,d\tau.$$

Určte $c(\omega)$ a zapíšte riešenie $u(x,t)$ tak, aby v ňom vystupovali funkcie $f(x)$ a $Q(x,t)$ a nie ich Fourierove transformácie.

Návod: (a) Ak $F(\omega,\alpha)$ je Fourierova transformácia funkcie $f(x,\alpha)$, tak

$$\mathcal{F}\left[\int f(x,\alpha)\,d\alpha\right] = \int F(\omega,\alpha)\,d\alpha.$$

(b) Veta o konvolúcii.

Riešenie: Označme

$$\begin{aligned} \overline{U}(\omega,t) &= \mathcal{F}[u] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{i\omega x}\,dx, \\ \overline{Q}(\omega,t) &= \mathcal{F}[Q] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Q(x,t)e^{i\omega x}\,dx. \end{aligned}$$

Potom po aplikácii Fourierovej transformácie na rovnicu máme

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \mathcal{F}\left[k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t)\right] = k\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] + \mathcal{F}[Q(x,t)]$$

Využitím tabuľky a nahradením podľa označenia vyššie dostaneme rovnicu

$$\frac{\partial\overline{U}}{\partial t} = k(-i\omega)^2\overline{U} + \overline{Q},$$

a po jednoduchej úprave dostaneme obyčajnú nehomogénnu diferenciálnu rovnicu (vzhľadom na t)

$$\frac{\partial\overline{U}}{\partial t} + k\omega^2\overline{U} = \overline{Q}$$

Z teórie ODR (alebo priamym dosadením) potom vieme, že že riešenie takej rovnice je naozaj

$$\overline{U}(\omega,t) = c(\omega)e^{-k\omega^2 t} + e^{-k\omega^2 t}\int_0^t \overline{Q}(\omega,\tau)e^{k\omega^2\tau}\,d\tau.$$

Skúmaním $\overline{U}(\omega,0)$ ďalej zistíme, že $c(\omega) = \mathcal{F}[f] = F(\omega)$.

$\overline{U}(\omega,t)$ je teda súčtom dvoch funkcií

$$F(\omega)e^{-k\omega^2 t} \qquad \text{a} \qquad e^{-k\omega^2 t}\int_0^t \overline{Q}(\omega,\tau)e^{k\omega^2\tau}\,d\tau \tag{1}$$

a vidíme tiež, že každá z nich je súčinom ďalších dvoch funkcii.

Vieme, že $F(\omega)$ je Fourierovou transformáciou funkcie $f(x)$ a $e^{-k\omega^2 t}$ je podľa tabuľky fourierovou transformáciou funkcie $\sqrt{\frac{\pi}{kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$. Potom z tabuľky vieme, že $F(\omega)e^{-k\omega^2 t}$ je Fourierova transformácia funkcie $f * \sqrt{\frac{\pi}{kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$.

Ostáva integrál

$$\begin{aligned}
e^{-k\omega^2 t}\int_0^t \overline{Q}(\omega,\tau)e^{k\omega^2\tau}\,d\tau &= \int_0^t \overline{Q}(\omega,\tau)\,e^{k\omega^2\tau}e^{-k\omega^2 t}\,d\tau \\
&= \int_0^t \overline{Q}(\omega,\tau)e^{-k\omega^2(t-\tau)}\,d\tau \\
&= \int_0^t \mathcal{F}\left[Q(x,\tau) * \sqrt{\frac{\pi}{k(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}}\right]d\tau \\
&= \mathcal{F}\left[\int_0^t Q(x,\tau) * \sqrt{\frac{\pi}{k(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}}\,d\tau\right]
\end{aligned}$$

Preto pôvodná funkcia $u(\omega,t)$ je súčtom

$$u(x,t) = f * \left(\sqrt{\frac{\pi}{kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right) + \int_0^t Q(x,\tau) * \sqrt{\frac{\pi}{k(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}}\,d\tau$$

V prípade potreby je možné $u(x,t)$ zapísať v integrálnom tvare s využitím $f * g = g * f$ a $(f+g) * h = f * h + g * h$

$$\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{1}{2\pi}&\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x},t)\sqrt{\frac{\pi}{kt}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4kt}}\,d\bar{x} \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} Q(\bar{x},\tau)\sqrt{\frac{\pi}{k(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4k(t-\tau)}}\,d\tau
\end{aligned}$$