Rovnica vedenia tepla s nulovými zdrojmi tepla a konštantnými tepelnými vlastnosťami je rovnica tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

V prípade obyčajných diferenciálnych rovníc, napríklad pri výpočte dráhy hmotného bodu je potrebné poznať počiatočnú polohu a počiatočnú rýchlosť a príslušná diferenciálna rovnica určí polohu bodu. Podobne v prípade rovnice vedenia tepla potrebujeme poznať začiatočné rozdelenie teploty (zvyčajne v čase t=0)

$$u(x,0) = f(x) \tag{2}$$

keďže v rovnici vedenia tepla vystupuje jedna časová derivácia. Rovnosť (2) nazývame začiatočná podmienka. Samotná začiatočná podmienka ale nestačí na predikciu vývoja teploty. Na to potrebujeme ešte poznať, čo sa deje na koncoch tyče $x = 0$ a $x = L$. Tu existuje niekoľko možností špecifikácie správania sa teploty a tieto podmienky nazývame okrajové podmienky. V rovnici vedenia tepla vystupuje druhá derivácia podľa priestorovej premennej, takže potrebujeme poznať dve podmienky. Tieto určujeme spravidla na koncoch.

Predpísaná teplota Jeden typ okrajovej podmienky je daný predpísaním teploty na okraji v závislosti od času, čiže

$$u(0,t) = u_B(t)$$

určuje správanie teploty v mieste $x = 0$. Podobným spôsobom je možné zadať teplotu aj v $x = L$.

Predpísaný tepelný tok Zodpovedá zadaniu ϕ v (**??**), čo zodpovedá zadaniu prvej derivácie teploty podľa x v $x = 0$ resp. $x = L$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \phi(t). \tag{3}$$

Nulový tepelný tok na hranici fyzikálne zodpovedá ideálne izolovanému okraju, príslušná podmienka je vtedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0. \tag{4}$$

Newtonov zákon ochladzovania Pre fyzikálne realistickejší scenár kontaktu tyče s odtekajúcou tekutinou nemožno dobre použiť ani predpísanú teplotu ani predpísaný tepelný tok. V takejto situácii odchádzajúce teplo z tyče ohreje tekutinu a táto tekutina prúdením odvedie toto teplo preč. Samozrejme, v blízkosti tyče bude tekutina teplejšia. Ako dobrá aproximácia sa ukazuje závislosť tepelného toku na okraji $x = 0$ a rozdielu teploty tyče a predpísanej teploty vonkajšej teploty v tvare

$$-K_0(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -H[u(0,t) - u_B(t)].$$

Tento vzťah sa nazýva Newtonov zákon ochladzovania (NZO) a koeficient $H \geq 0$ je koeficient prenosu tepla.

Ďalším rozborom možno pre $x = L$ ukázať, že Newtonov zákon ochladzovania bude mať tvar

$$-K_0(L)\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = H[u(L,t) - u_B(t)].$$

Okrajové podmienky možno kombinovať, takže napríklad na jednom okraji môže byť zadaná predpísaná teplota a na druhom okraji môže byť predpísaný tepelný tok.

Rovnica vedenia tepla

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q.$$

Rovnica vedenia tepla s nulovými zdrojmi tepla a konštantnými tepelnými vlastnosťami

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Začiatočná podmienka

$$u(x,0) = f(x)$$

Okrajové podmienky

$$\begin{aligned}
&\text{(predpísaná teplota)} & u(0,t) &= u_B(t)\\
&\text{(predpísaný tepelný tok)} & -K_0(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \phi(t)\\
&\text{(NZO pre x=0)} & -K_0(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= -H[u(0,t) - u_B(t)]\\
&\text{(NZO pre x=L)} & -K_0(L)\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) &= H[u(L,t) - u_B(t)]
\end{aligned}$$

Skôr, než sa pustíme do riešenia všeobecnej rovnice vedenia tepla pozrime sa na nasledujúci špeciálny prípad. Predpokladajme, že máme tyč dĺžky L bez vnútorných zdrojov tepla, ktorej konce udržiavame na konštantných teplotách

$$u(0,t) = T_1,$$
$$u(L,t) = T_2.$$

Skúsenosť nám naznačuje, že pri počiatočnom rozložení teploty $u(x,0) = f(x)$ očakávam, že po dostatočne dlhom čase dôjde k ustáleniu teploty $u(x,t)$. Poďme teda skúsiť nájsť také rozloženie teploty, ktoré sa nebude meniť v čase, čiže $u(x,t) = u(x)$. Takéto riešenie nazývame stacionárne riešenie (t.j. riešenie nezávislé na čase). Keďže potom $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ a u je funkciou len jednej premennej, rovnica vedenia tepla v tomto prípade prejde na tvar

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \tag{5}$$

s okrajovými podmienkami

$$u(0) = T_1,$$
$$u(L) = T_2.$$

Rovnica (5) je obyčajná diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami so všeobecným riešením, ktoré získame, keď túto rovnicu dva krát integrujeme. Dostaneme tak

$$u(x) = c_1 x + c_2$$

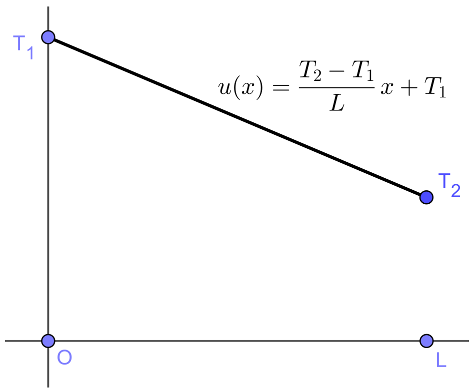
Po aplikácii okrajových podmienok získame koeficienty c_1 a c_2,

$$c_2 = T_1,$$
$$c_1 = \frac{T_2 - T_1}{L},$$

a teda stacionárne riešenie je

$$u(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

V uvedenom prípade je stacionárnym riešením časť priamky.



Obr. 1: Stacionárne riešenie rovnice vedenia tepla $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ s okrajovými podmienkami $u(0,t) = T_1$, $u(L,t) = T_2$.

Podobným spôsobom môžeme zistiť stacionárne riešenie rovnice vedenia tepla s okrajovými podmienkami, ktoré určujú tepelný tok na okraji tyče, konkrétne pre prípad tyče s ideálne izolovanými koncami, čiže nulovým tokom na okrajoch

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= 0,\\
\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Podmienka nezávislosti riešenia na čase opäť vedie na okrajovú úlohu pre jednoduchú obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 u}{dx^2} &= 0,\\
\frac{du}{dx}(0) &= 0,\\
\frac{du}{dx}(L) &= 0,
\end{aligned}
$$

ktorej všeobecné riešenie je priamka $u(x) = c_1 x + c_2$. Okrajové podmienky nám hovoria, že táto priamka má mať nulový sklon v 0 a L, čiže riešením bude konštantná funkcia. Naozaj, po aplikovaní okrajových podmienok dostaneme, že

$$u(x) = c_2.$$

Aby sme mohli určiť konkrétnu hodnotu konštanty c_2, potrebujeme ešte nejakú informáciu navyše, konkrétne začiatočné rozloženie teploty (všimnime si, že v prípade predpísaných teplôt na okrajoch sme začiatočnú podmienku nepotrebovali). Nech teda začiatočná teplota je $u(x,0) = f(x)$. Keďže tyč je izolovaná, celková tepelná energia v tyči musí byť konštantná. Použitím vzťahu (**??**), kde $e = c\rho u$ a $\phi = -K_0\frac{\partial u}{\partial x}$ (pričom c a ρ považujeme za konštanty) a $Q = 0$ získame

$$\frac{d}{dt}\int_0^L c\rho u\, dx = -K_0\frac{\partial u}{\partial x}(0) + K_0\frac{\partial u}{\partial x}(L) = 0,$$

čiže

$$\int_0^L c\rho u\, dx = c_0,$$

Tyč je izolovaná, takže celková energia pri začiatočnom rozdelení teploty sa rovná energii v každom čase, čo sme ukázali, že je c_0. Celková energia na začiatku je

$$c\rho \int_0^L f(x)dx.$$

Táto sa musí rovnať celkovej energii pri rozložení teploty zodpovedajúcom stacionárnemu riešeniu, čo je

$$c\rho \int_0^L c_2\, dx = c\rho c_2 L,$$

čiže

$$c\rho \int_0^L f(x)dx = c\rho c_2 L,$$

a teda

$$u(x) = c_2 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx$$

A výraz na pravej strane je vlastne stredná hodnota počiatočného rozloženia teploty.

Stacionárne riešenie rovnice vedenia tepla je riešenie, ktoré nezávisí od časovej premennej.

Stacionárne riešenie okrajovej úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) &= T_1, \\ u(L,t) &= T_2 \end{aligned}$$

je

$$u(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

Stacionárne riešenie okrajovej úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = f(x)$$

je

$$u(x) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx.$$

Literatúra

[1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.