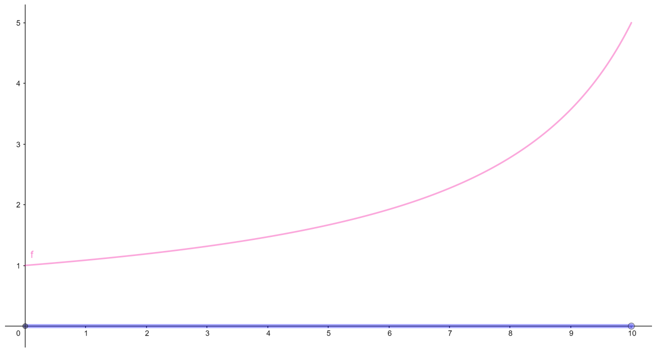
0.1 Rovnica vedenia tepla

Majme homogénnu tyč konštantného prierezu, ktorá bola zohriata tak, že distribúcia tepoloty na tyči zodpovedá priebehu grafu na obrázku 1.



Obr. 1: Rozloženie teploty (červená krivka) na homogénnej tyči konštantného prierezu (modrá úsečka).

Počiatočné rozloženie teploty zodpovedá funkcii $u(x, 0) = f(x)$. To čo nás zaujíma je vývoj teploty v čase $u(x, t)$.

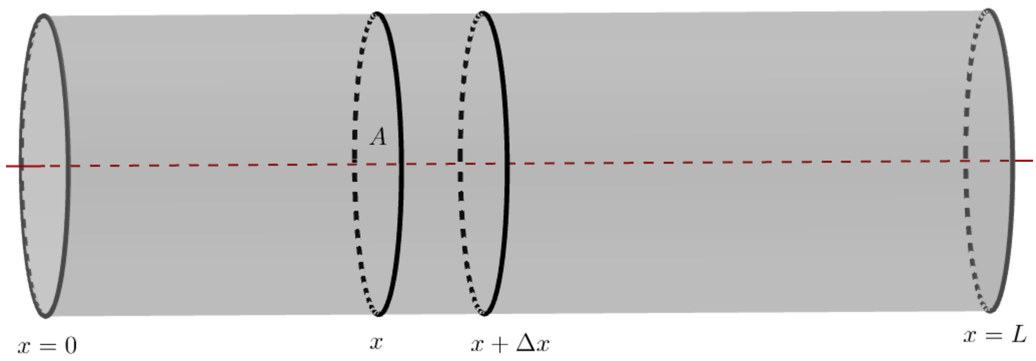
To ako bude vývoj teploty vyzerať zrejme závisí od mnohých ďalších podmienok. Iný bude ak celá tyč bude tepelne izolovaná a iný ak je umožnený únik tepla do okolia. Pre jednoduchosť uvažujme že celá tyč je izolovaná, čiže žiadne teplo neuniká do okolia. Ak si spomenieme na fyzikálny princíp, že teplo prechádza z teplejších telies na chladnejšie a čím je rozdiel teplôt vyšší, tým rýchlejšie sa teplo prenáša, ľahko si uvedomíme, že zmena teploty v čase bude zrejme nejako závisieť od rozloženia teploty a jej lokálnych zmien. Tým pádom ak $u(x, t)$ je teplota v čase t, vieme, že $\frac{\partial u}{\partial t}$ nejako závisí od $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Po tomto neformálnom rozbore sa pustíme do konkrétneho odvodenia rovnice určujúcej vyššie spomínaný vzťah. Keďže teplota je prejavom tepla a teplo je vlastne forma energie, budeme najskôr pracovať s energiou.

Uvažujme tyč konštantného prierezu s obsahom A a dĺžkou L, ktorá je orientovaná v smere osi x. Predpokladajme, že v danom priereze sú všetky tepelné vlastnosti tyče rovnaké, čiže tyč sa správa ako jednorozmerný objekt. Taktiež tepelne izolujme plášť uvažovanej tyče, čím zabránime úniku tepla cez plášť.

Zaveďme pojem hustoty tepelnej energie. **Hustota tepelnej energie** $e(x, t)$ je množstvo tepelnej energie na jednotku objemu. Môžeme si všimnúť, že hustota tepelnej energie závisí od x a t.

Ak zvolíme na tyči úsek medzi x a $x + \Delta x$ a ak na tomto úseku je hustota tepelnej energie konštantná, množstvo tepelnej energie v tomto úseku bude



Obr. 2: Tyč a vyznačený úsek.

súčinom objemu tohoto úseku a hustoty tepelnej energie na tomto úseku. V prípade, že hustota tepelnej energie nie je konštantná, môžeme zvoliť dostatočne krátky úsek. V tom prípade dostaneme približne hodnotu tepelnej energie v danom úseku ako

$$\textit{tepelná energia} \approx e(x,t)A\Delta x \tag{1}$$

Pozrime sa, ako sa v danom úseku môže zmeniť energia v čase. Plášť sme zaizolovali, takže energia sa môže zmeniť len cez krajné podstavy x a $x + \Delta x$ alebo vďaka nejakému vnútornému zdroju energie. Potom miera zmeny tepelnej energie v danom úseku za jednotku času je súčtom energie, ktorá pritečie a odtečie cez krajné podstavy za jednotku času a príspevku energie z vnútorného zdroja za jednotku času.

Zmena tepelnej energie v čase pre dostatočne malý úsek je z (1)

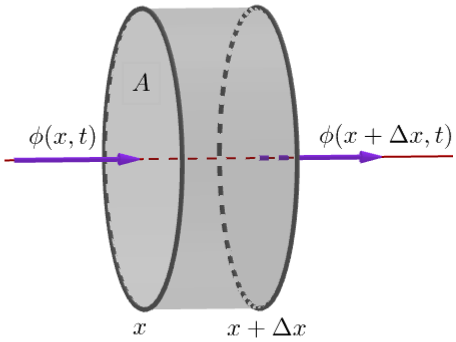
$$\frac{\partial}{\partial t}[e(x,t)A\Delta x] \tag{2}$$

Formalizujme teraz jednotlivé príspevky ku zmene celkovej tepelnej energie. K tomu si najskôr zadefinujeme pojem tepelného toku.

Tepelný tok $\phi(x,t)$ je množstvo energie ktoré prejde jednotkovou plochou v jednom smere za jednotku času. Pre naše účely zavedieme nasledovnú konvenciu. Tepelný tok bude kladný, práve vtedy keď energia prúdi v kladnom smere osi x (štandardne zľava doprava), v opačnom prípade bude tok záporný. Potom celková tepelná energia, ktorá pretečie cez okraje tenkého úseku za jednotku času bude

$$\phi(x,t)A - \phi(x + \Delta x, t)A$$

Do celkovej zmeny energie môžu ešte prispievať vnútorné zdroje, ktoré súhrnne označíme ako funkciu $Q(x,t)$ a bude to množstvo vygenerovanej tepelnej energie na jednotku objemu za jednotku času.



Obr. 3: Tok energie cez úsek tyče

Celková zmena tepelnej energie je teda

$$\frac{\partial}{\partial t}[e(x,t)A\Delta x] \approx \phi(x,t)A - \phi(x+\Delta x,t)A + Q(x,t)A\Delta x \tag{3}$$

Ak predpokladáme, že pre $\Delta x \to 0$ chyba aproximácie (3) konverguje k 0, dostaneme vydelením $A\Delta x$ a limitným prechodom

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x,t) - \phi(x+\Delta x,t)}{\Delta x} + Q(x,t).$$

Limita na pravej strane je presne parciálna derivácia $-\phi$ podľa x, takže dostávame

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q(x,t) \tag{4}$$

Pri tomto postupe máme samozrejme problém, že o chybe aproximácie v podstate nič nevieme. Tento nedostatok je možné obísť trochu iným postupom.

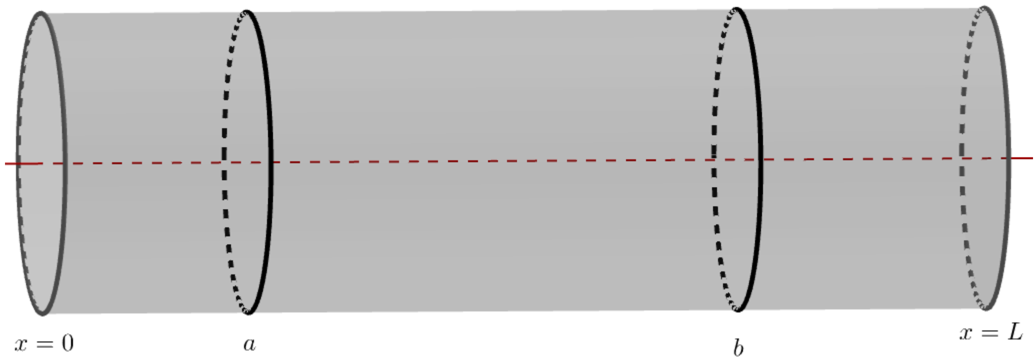
Namiesto malého úseku tyče medzi x a $x+\Delta x$ vezmime úsek ľubovoľnej konečnej dĺžky od a po b.

Ak $e(x,t)$ je funkcia hustoty energie na tyči, celková tepelná energia vo zvolenom úseku (a,b) bude

$$\int_a^b e(x,t)A\,dx.$$

Toto je už funkcia závislá len od t a zmena celkovej energie v úseku sa spočíta podobne ako v prípade malého úseku vyššie. Bude to súčet celkového toku na okrajoch a príspevku z vnútorných zdrojov, čiže

$$\frac{d}{dt}\int_a^b e(x,t)A\,dx = \phi(a,t)A - \phi(b,t)A + \int_a^b Q(x,t)A\,dx$$



Obr. 4: Ľubovoľný úsek

resp. po vydelení A

$$\frac{d}{dt}\int_a^b e(x,t)\,dx = \phi(a,t) - \phi(b,t) + \int_a^b Q(x,t)\,dx \tag{5}$$

Zo známych vzťahov z analýzy máme pre spojité $e(x,t)$ a konštantné a a b

$$\frac{d}{dt}\int_a^b e(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} e(x,t)\,dx$$

a pre spojite diferencovateľné $\phi(x,t)$

$$\phi(a,t) - \phi(b,t) = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)\,dx$$

Dosadením do (5) a presunom všetkého na jednu stranu dostaneme

$$\int_a^b \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - Q\right)\,dx = 0$$

Keďže tento integrál musí byť nulový pre ľubovoľnú voľbu úseku (a,b), pomerne jednoduchým argumentom dostaneme, že integrand musí byť nulový, čo po drobnej úprave dáva presne rovnicu (4)

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q(x,t)$$

Získali sme teda rovnicu, ktorá ale udáva vzťah medzi hustotou tepelnej energie a tepelným tokom. My by sme však potrebovali rovnicu obsahujúcu ako neznámu funkciu teploty. Otázka teda znie, či existuje nejaký vzťah medzi teplotou $u(x,t)$ a hustotou $e(x,t)$ a tokom $\phi(x,t)$.

V prípade hustoty tepelnej energie toto spojivo je tepelná kapacita. **Tepelná kapacita** c je množstvo tepelnej energie ktoré treba dodať jednotke hmotnosti materiálu, aby jeho teplota stúpla o jednotku. Tepelná kapacita vo všeobecnosti závisí od teploty materiálu. Pokiaľ však rozsah teplôt nie je príliš veľký, môžeme tepelnú kapacitu považovať za nezávislú od teploty. V našom modeli budeme ešte navyše požadovať, že tyč môže byť zložená z rôznych materiálov a vtom prípade tepelná kapacita bude funkciou x, čiže $c = c(x)$. Veľmi často však budeme počítať s tyčou z jedného materiálu. V tom prípade tepelná kapacita c bude konštantná.

Už vieme, že množstvo tepelnej energie v tenkom reze je (zhruba) $e(x,t)A\Delta x$. Na druhej strane je to tiež množstvo tepelnej energie, ktoré je treba dodať rezu, aby sa ohrial z referenčnej teploty $0°$ na požadovanú teplotu $u(x,t)$. Potom množstvo tepelnej energie na jednotku hmotnosti je $c(x)u(x,t)$. Na určenie hmotnosti úseku tyče použijeme hustotu materiálu $\rho(x)$, ktorú budeme považovať za funkciu závislú od x v prípade tyče zloženej z nehomogénneho materiálu. Potom celková hmotnosť úseku je $\rho(x)A\Delta x$ a celková tepelná energia v tenkom reze je $c(x)u(x,t)\rho(x)A\Delta x$. Takže dostávame

$$e(x,t)A\Delta x = c(x)u(x,t)\rho(x)A\Delta x$$

a po zjednodušení získame

$$e(x,t) = c(x)u(x,t)\rho(x).$$

Takto vyjadrenú hustotu tepelnej energie môžeme dosadiť do rovnice (4), čím získame

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q. \tag{6}$$

Ostáva nahradiť vhodným spôsobom tepelný tok. Na to využijeme vzťah pochádzajúci od Fouriera, ktorým formalizoval nasledujúce kvalitatívne vlastnosti tepelného toku:

1. Ak je teplota v nejakej oblasti konštantná tepelný tok je nulový.

2. Pri rozdiele teplôt prúdi tepelná energia z teplejšej oblasti do chladnejšej

3. Čím vyšší rozdiel teplôt (vzhľadom na jeden materiál), tým vyšší tok tepelnej energie.

4. Tok tepelnej energie je rozdielny pre rôzne materiály aj v prípade rovnakého teplotného rozdielu.

Spomínaný vzťah sa nazýva Fourierov zákon vedenia tepla a má tvar

$$\phi = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{7}$$

Z tejto rovnice vidíme, že tepelný tok je úmerný zmene teploty. Ak teplota je rastúca funkcia vzhľadom na x, jej parciálna derivácia podľa x je kladná a teplota je väčšia v smere osi x, preto tepelný tok musí byť orientovaný sprava doľava, preto vo vzťahu (7) vystupuje znamienko mínus. Koeficient K_0 nazývame koeficient tepelnej vodivosti a meria schopnosť materiálu viesť teplo. K_0 závisí od konkrétneho materiálu a vo všeobecnosti závisí aj od teploty. Podobne ako v prípade tepelnej kapacity, nebudeme závislosť od teploty brať do úvahy a vo všeobecnosti $K_0 = K_0(x)$ bude funkciou x.

Teraz už môžeme nahradiť aj tepelný tok ϕ v rovnici (6). Tak dostaneme rovnicu vedenia tepla

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q. \tag{8}$$

Zdroje tepla zahrnuté v Q zvyčajne považujeme za známe. V prípade, že ρ, c a K_0 sú konštantné a $Q = 0$, po jednoduchej úprave dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kde konštanta $k = \frac{K_0}{c\rho}$ sa nazýva koeficient tepelnej difúzie.

Literatúra

[1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.