0.1 Rovnica vedenia tepla na neohraničenom intervale

Skôr, než sa začneme venovať téme z názvu, pripomenieme si iný spôsob zápisu Fourierovho radu.

Komplexný tvar Fourierovho radu

Spojité, $2L$-periodické funkcie ($f(-L) = f(L)$) vieme zapísať v tvare Fourierovho radu

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{1}$$

Koeficienty a_0, a_n a b_n vieme spočítať zo vzorcov

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx. \end{aligned}$$

Funkcie sin a cos je možné vyjadriť v komplexnom tvare ako

$$\cos x = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Po dosadení do (1) a jednoduchých úpravách získame Fourrierov rad funkcie f v komplexnom tvare

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L}, \tag{2}$$

pričom koeficienty tohto radu sú pre $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{in\pi x/L}.$$

a $c_0 = a_0$. V prípade, že $f(x)$ je reálna funkcia, $c_{-n} = \bar{c}_n$.

Formulu na výpočet koeficientov c_n je tiež možné získať priamo z (2) využitím ortogonality. V prípade komplexných funkcií je však potrebné použiť definíciu skalárneho súčinu v tvare

$$f \cdot g = \int_a^b \overline{f(x)} g(x)\, dx.$$

Vzhľadom na tento skalárny súčin je systém funkcií $\{e^{-in\pi x/L}; -L < x < L; n \in \mathbb{Z}\}$ ortogonálnym systémom funkcií, pričom

$$\int_{-L}^{L} \overline{e^{-in\pi x/L}} e^{-im\pi x/L}\, dx = \int_{-L}^{L} e^{in\pi x/L} e^{-im\pi x/L}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2L, & m = n. \end{cases}$$

Takže prenásobením (2) funkciou $e^{im\pi x/L}$ a integrovaním od $-L$ po L dostaneme

$$\int_{-L}^{L} f(x) e^{im\pi x/L}\, dx = 2Lc_m,$$

z čoho už c_m vyjadríme ľahko.

Fourierov rad funkcie f(x)

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Koeficienty:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx. \end{aligned}$$

Fourierov rad funkcie f(x) - komplexný tvar

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L},$$

Koeficienty:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{in\pi x/L}.$$

0.1.1 Rovnica vedenia tepla – neohraničený interval

V predchádzajúcich častiach sme videli, že pri ohraničených problémoch sme na nájdenie riešenia rovnice vedenia tepla potrebovali poznať okrajové podmienky. Čo však v prípade, ak modelujeme úlohu pri ktorej vieme, že vplyv okrajových podmienok je zanedbateľný. V takom prípade sa ukazuje rozumné uvažovať neohraničený interval.

Uvažujme teda rovnicu vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3}$$

pričom požadujeme, aby riešenie $u(x,t)$ tejto rovnice bolo definované na intervale $-\infty < x < \infty$. Počiatočnú podmienku $u(x,0) = f(x)$ potrebujeme samozrejme aj tentokrát.

Na prvý pohľad sa zdá, že okrajové podmienky nepotrebujeme. Z fyzikálnych dôvodov však často zadávame správanie teploty limitne v $\pm\infty$. Asi najjednoduchší prípad je $u(\pm\infty, t) = 0$.

Vieme, že výrazy $\sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}$ a $\cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}$ sú riešením rovnice (3) pre každé celé číslo n. Potom aj ich kombinácia

$$\cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} + i \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} = e^{in\pi/Lx} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \tag{4}$$

je riešením tejto rovnice pre každé celé číslo n. Ľahko sa dá presvedčiť o tom, že keď nahradíme výraz $n\pi/L$ ľubovoľným reálnym číslom ω

$$u = e^{i\omega x} e^{-k\omega^2 t}, \quad \omega \in \mathbb{R} \tag{5}$$

bude stále riešením rovnice (3). Všimnime si, že v prípade riešení rovnice vedenia tepla na ohraničenom intervale, tvorili vlastné čísla diskrétnu množinu (tzv. diskrétne spektrum), zatiaľ čo v prípade riešení typu (5) tvoria čísla ω celé kontinuum (spojité spektrum).

Riešenia tvaru (5) je možné odvodiť použitím metódy separácie premenných, zavedením $u(x,t) = \phi(x)G(t)$. Tým získame opäť dve obyčajné diferenciálne rovnice rovnako ako v prípade ohraničeného problému

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= -\lambda k G,\\ \frac{d^2\phi}{dx^2} &= -\lambda\phi.\end{aligned}$$

Všeobecné riešenie pre G je zrejme rovnaké ako pri ohraničenom probléme. Pri riešení okrajového problému pre ϕ narazíme na problém. Ak by sme ako okrajové podmienky vzali $\phi(\pm\infty) = 0$, tak tento problém nebude mať netriviálne riešenie pre žiadne λ. Pre $\lambda > 0$ dostaneme oscilatorické riešenia tvaru $c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$, pre $\lambda < 0$ podobne len hyperbolickými funkciami a $\lambda = 0$ vráti lineárnu funkciu.

Preto trochu zoslabíme okrajové podmienky tak, že budeme predpokladať, že riešenie je v nekonečne ohraničené $|\phi(\pm\infty)| < \infty$. Vtedy už okrajovej úlohe vyhovujú riešenia pre ľubovoľné $\lambda > 0$

$$\phi = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

a $\lambda = 0$, pre ktorú je ϕ nenulová konštanta.

Všimnime si, že v prípade riešení rovnice vedenia tepla na ohraničenom intervale, tvorili vlastné čísla diskrétnu množinu (tzv. diskrétne spektrum), zatiaľ čo v prípade práve získaného riešenia tvoria čísla λ celé kontinuum (spojité spektrum).

Týmto spôsobom teda získame riešenia $\sin\sqrt{\lambda}x\, e^{-\lambda kt}$ a $\cos\sqrt{\lambda}x\, e^{-\lambda kt}$. V prípade konečného problému (a teda diskrétneho spektra) sme výsledné všeobecné riešenie získali ako súčet skalárnych násobkov riešení uvedených typov pre všetky vlastné hodnoty λ. Keďže teraz vlastné hodnoty tvoria kontinuum, súčet nahradíme integrálom. Získame tak všeobecné riešenie v tvare

$$u(x,t) = \int_0^\infty c_1(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x\, e^{-\lambda kt} + c_2(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x\, e^{-\lambda kt}\, d\lambda,$$

kde $c_1(\lambda)$ a $c_2(\lambda)$ sú ľubovoľné funkcie. Zvyčajne sa v tomto riešení nahrádza $\lambda = \omega^2$, a potom

$$u(x,t) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\, e^{-\omega^2 kt} + B(\omega)\sin\omega x\, e^{-\omega^2 kt}\, d\omega,$$

pričom $A(\omega)$ a $B(\omega)$ vzniknú z funkcií $c_1(\lambda)$ a $c_2(\lambda)$ zámenou premenných v integrále, čiže $A(\omega) = 2\omega c_1(\omega^2)$ a podobne pre B.

Na nájdenie funkcií $A(\omega)$ a $B(\omega)$ potrebujeme potom poznať začiatočnú podmienku v tvare

$$u(x,0) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x \, d\omega$$

Kompaktnejší (a v istom zmysle všeobecnejší) tvar riešenia dostaneme, keď namiesto riešení cos a sin pre ϕ vezmeme komplexné riešenia $e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$ pre $\lambda \geq 0$. Substitúciou $\omega = \sqrt{\lambda}$ dostaneme riešenia $e^{\pm i\omega x}$ pre $\omega \geq 0$, ktoré tvoria tú istú množinu riešení, ako $e^{-i\omega x}$ pre $\omega \in \mathbb{R}$. Potom riešením rovnice vedenia tepla bude $u(x,t) = e^{-i\omega x}e^{-k\omega^2 t}$, resp. ľubovoľná ich kombinácia v integrálnom zmysle

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^\infty c(\omega)e^{-i\omega x}e^{-k\omega^2 t} \, d\omega$$

V tomto prípade je počiatočná podmienka splnená pre $u(x,0) = f(x)$ v tvare

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty c(\omega)e^{-i\omega x} \, d\omega$$

Akýsi náznak, prečo v prípade neohraničeného dostaneme kontinuum vlastných hodnôt si ukážeme na nasledovnom príklade:

Príklad: Uvažujme rovnicu vedenia tepla s periodickými okrajovými podmienkami a začiatočnou podmienkou

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
u(-L,t) &= u(L,t) \\
\frac{\partial}{\partial x}u(-L,t) &= \frac{\partial}{\partial x}u(L,t) \\
u(x,0) &= \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}
\end{aligned}$$

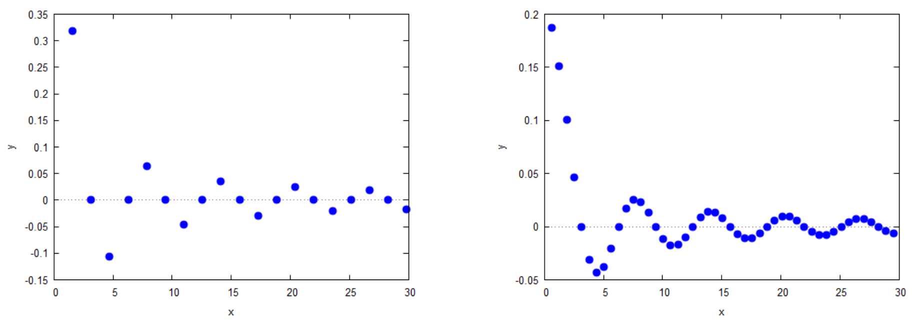
Vieme, že riešenie je určené hodnotami koeficientov a_n a b_n, ktoré získame ako koeficienty Fourierovho radu začiatočnej podmienky $u(x,0)$. Vyššie sme ukázali, ako tieto koeficienty zakódovať do koeficientov Fourierovho radu v komplexnom tvare uvedenej reálnej funkcie $u(x,0)$.

$$
\begin{aligned}
c_0 = a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(x,0)\,dx = \frac{1}{L} \\
c_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(x,0)e^{in\pi x/L}\,dx = \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L},\ \text{pre } n > 0. \\
c_{-n} &= \bar{c}_n.
\end{aligned}
$$

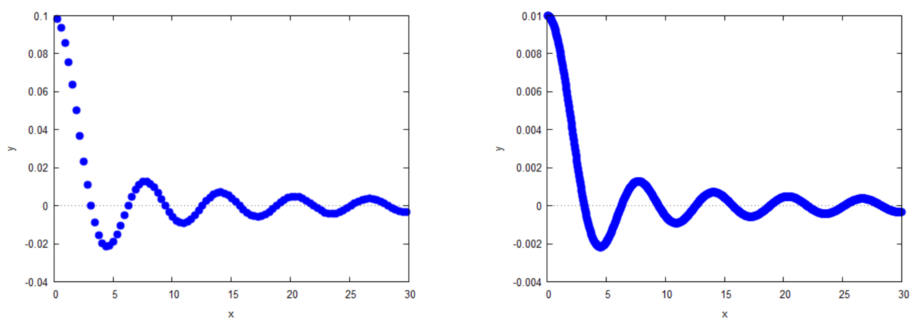
Po substitúcii $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$

$$
c_n = \frac{1}{L\omega_n}\sin\omega_n = \frac{1}{L}\frac{\sin\omega_n}{\omega_n}
$$

Pre dané L môžeme ω_n vynášať na x-ovú os. Ak na os y vynášame hodnoty c_n dostaneme nasledujúce grafy. Môžeme si všimnúť, že s rastúcim L sa



Obr. 1: Grafy pre $L = 2$ vľavo a $L = 5$ vpravo.



Obr. 2: Grafy pre $L = 10$ vľavo a $L = 100$ vpravo.

zmenšuje vzdialenosť medzi dvoma po sebe idúcimi ω_n, čo je zrejmé zo vzťahu

$$
\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \tag{6}
$$

Teda čím väčšie L, tým viac hodnôt ω (a tým pádom aj vlastných hodnôt) sa nachádza na danom úseku, resp. vzdialenosť medzi dvoma vlastnými hodnotami sa s rastúcim L zmenšuje limitne až k 0. Takto vlastné hodnoty teda postupne s rastúcim L vypĺňajú reálnu os (presnejšie jej kladú časť, reálnu os vypĺňajú hodnoty ω_n). Preto môžeme očakávať, že pre $L \mapsto \infty$ dostaneme kontinuum vlastných hodnôt. Navyše vieme, nám tento príklad naznačuje, že funkcie definované na $\mathbb{R}$ intervale môžeme v istom zmysle chápať ako periodické funkcie s nekonečnou periódou.

Formalizujme teraz tento prístup. Riešenie rovnice vedenia tepla na konečnom intervale $-L < x < L$ s periodickými okrajovými podmienkami je určené koeficientami Fourierovho radu začiatočnej podmienky $u(x, 0) = f(x)$. Vieme, že ak $f(x)$ je spojitá na $L \leq x \leq L$, tak Fourierov rad tejto funkcie konverguje na tomto intervale k funkcii $f(x)$. Ak $f(x)$ má na uvedenom intervale konečný počet bodov nespojitostí, v bodoch nespojitostí Fourierov rad konverguje k priemeru hodnôt limít zľava a sprava funkcie $f(x)$. Toto posledné tvrdenie samozrejme platí aj pre spojité funkcie, lebo v bode v ktorom je funkcia spojitá sa limita zľava rovná limite sprava. Ak označíme $f(x-)$ $(f(x+))$ limitu $f(x)$ v bode x zľava (sprava), tak

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L}$$

pričom

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{in\pi x/L} \, dx.$$

V predošlej sume nahraďme c_n (budeme musieť v itegrále premenovať premennú x)

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(\bar{x}) e^{in\pi\bar{x}/L} \, d\bar{x} \; e^{-in\pi x/L}$$

Označme $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$. Tieto tvoria diskrétnu množinu hodnôt a vzdialenosť dvoch po sebe idúcich ω_n je $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$. ω_n nazývame vlnové čísla a vyjadrujú počet vĺn na intervale 2π (uvedomme si, že $f(x)$ je v tvare Fourierovho radu súčtom vĺn v tvare sínusov alebo kosínusov). Z ω_n ľahko spočítame vlnovú dĺžku príslušnej vlny, ktorá je $\frac{2L}{n}$. Potom $\frac{1}{2L} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$, takže predošlú rovnosť môžeme prepísať ako

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(\bar{x}) e^{i\omega_n\bar{x}} \, d\bar{x} \; e^{-i\omega_n x} \tag{7}$$

Funkciu f teda máme napísanú ako súčet vĺn istých vlnových dĺžok. S rastúcim L získavame stále viac a viac vlnových čísel, tým pádom aj stále viac možných vlnových dĺžok. Takže pre $L \to \infty$, kedy $\omega_n \to 0$ môžeme očakávať, že $f(x)$ bude súčtom vĺn všetkých možných vlnových dĺžok.

Na pravú stranu predošlej rovnosti sa môžeme pozerať ako na súčet obdĺžnikov s podstavou $\Delta\omega$ a výškou $\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(\bar{x})e^{i\omega_n \bar{x}}\, d\bar{x}$. Pre $L \to \infty$, za predpokladu, že uvedený integrál konverguje, sa tento integrál nebude príliš líšiť od $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})e^{i\omega_n \bar{x}}\, d\bar{x}$. Takže na pravú stranu (7) sa pre $L \to \infty$ môžeme pozerať ako na integrálny súčet. Keďže pre $L \to \infty$ máme $\Delta\omega \to 0$ tak môžeme odhadnúť, že

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})e^{i\omega\bar{x}}\, d\bar{x} \right] e^{-i\omega x}\, d\omega \tag{8}$$

Túto rovnosť nazývame Fourierova integrálna identita a výraz v hranatých zátvorkách voláme Fourierova transformácia funkcie $f(x)$, ktorej klasické značenie je

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})e^{i\omega\bar{x}}\, d\bar{x}.$$

V (8) vidíme, že funkciu $f(x)$ máme vyjadrenú ako súčet vĺn všetkých možných vlnových dĺžok, pričom amplitúda vlny s vlnovým číslom ω je určené hodnotou Fourierovej transformácie funkcie $f(x)$ v ω, t.j. $F(\omega)$. Získali sme teda Fourierovu transformáciu

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})e^{i\omega\bar{x}}\, d\bar{x}.$$

a inverznú Fourierovu transformáciu (pre spojitú $f(x)$)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}\, d\omega.$$

Vráťme sa späť k rovnici vedenia tepla na neohraničenom intervale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Už sme si povedali, že $e^{-i\omega x}e^{-k\omega^2 t}$ je riešením tejto rovnice pre každé reálne číslo ω, preto zo zovšeobecneného princípu superpozície máme, že riešením je funkcia

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)e^{-i\omega x}e^{-k\omega^2 t}\, d\omega.$$

Počiatočná podmienka $u(x,0) = f(x)$ je splnená, ak

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{-i\omega x} \, d\omega$$

čo je presne Fourierova integrálna reprezentácia funkcie $f(x)$ a teda $c(\omega)$ je Fourierova transformácia funkcie $f(x)$.

$$c(\omega) = F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} \, dx.$$

Riešenie $u(x,t)$ je možné zjednodušiť dosadením $c(\omega)$ a zámenou poradia integrovania.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) e^{i\omega\bar{x}} \, d\bar{x} e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t} \, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-\bar{x})} e^{k\omega^2 t} d\omega \, d\bar{x} \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} e^{-i\omega x} d\omega$$

je inverzná Fourierova transformácia funkcie $e^{-k\omega^2 t}$, ktorú je možné pomerne jednoducho spočítať a

$$g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Teda riešenie rovnice vedenia tepla na neohraničenom intervale je

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} \, dx$$

Výhoda takéhoto tvaru riešenia spočíva v tom, že dáva priamy vzťah riešenia od začiatočného rozloženia teploty. Z tohoto tvaru možno vypozorovať, aký je vplyv hodnoty začiatočnej teploty v $\bar{x}$ na hodnotu teploty $u(x,t)$ v danom bode x a čase t. Funkcia

$$G(x,t;\bar{x},0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt}$$

je špeciálny prípad (resp. špeciálna hodnota) tzv. Greenovej funkcie rovnice vedenia tepla na neohraničenom intervale.

Poznámka: Diracova δ funkcia je „funkcia“ zvyčajne definovaná ako

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

pričom zároveň spĺňa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Obyčajne sa tiež reprezentuje ako limita postupne sa zužujúcich obdĺžnikových funkcii s obsahom 1.

$$u_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a < x < a \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

$\lim_{a \to 0} u_a(x) = \delta(x)$

Matematicky δ patrí medzi tzv distribúcie. Jej korektná definícia je, že to je objekt, ktorý spĺňa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\, dx = f(a)$$

Pomocou δ funkcie sa modelujú napr. impulzy.

Pre $t \to 0$ má funkcia $g(x)$ vlastnosti ako Diracova δ.

Pozrime sa teraz na rovnicu vedenia tepla na neohraničenom intervale so začiatočnou podmienkou $u(x, 0) = \delta(x)$. Fyzikálne by to zodpovedalo situácii, keď v čase 0 v bode $x = 0$ tyč prudko ohrejete. Keďže už vieme, ako vyzerá riešenie, máme hneď

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{x}) \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt}\, dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-x/4kt}$$

Toto riešenie nazývame fundamentálne riešenie rovnice vedenia tepla.

Príklad: Vezmime rovnicu vedenia tepla na neohraničenom intervale so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = \begin{cases} 100 & x > 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Riešením je

$$u(x,t) = \frac{100}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^{\infty} e^{-(x-\bar{x})/4kt} d\bar{x},$$

ktoré jednoduchou substitúciou ($z = (\bar{x} - x)/\sqrt{4kt}$) možno previesť na tvar

$$u(x,t) = \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{4kt}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz = \frac{100}{\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-z^2}\, dz + \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-z^2}\, dz \right).$$

Posledná rovnosť vyplýva z párnosti integrovanej funkcie. Prvý integrál v zátvorke vieme vyčísliť a je rovný $\pi/2$, a teda máme

$$u(x,t) = 50 + \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-z^2}\, dz$$