0.1 Riešenie rovnice vedenia tepla na ohraničenom intervale

V predchádzajúcej časti sme si odvodili rovnicu vedenia tepla a podmienky (počiatočná, okrajové), za ktorých by sme mali byť schopní nájsť jej riešenie. V tejto časti si predstavíme metódu, pomocou ktorej budeme schopní nájsť riešenie rovnice vedenia tepla pre homogénnu rovnicu vedenia tepla s konštantnými koeficientami bez vnútorných zdrojov tepla so špeciálnymi okrajovými podmienkami a špeciálnou začiatočnou podmienkou. Konkrétne teda budeme uvažovať rovnicu vedenia tepla v tvare

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L,\, t > 0 \tag{1}$$

s okrajovými podmienkami

$$u(0,t) = 0 \tag{2}$$

$$u(L,t) = 0 \tag{3}$$

a zatiaľ všeobecnou začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = f(x). \tag{4}$$

Táto úloha fyzikálne zodpovedá vedeniu tepla v tyči dĺžky L konštantného prierezu, s konštantnými tepelnými vlastnosťami, ktorej konce sú udržiavané na konštantnej teplote $0°$.

0.1.1 Metóda separácie premenných

Ideou predstavenej metódy je hľadať riešenie $u(x,t)$ v tvare súčinu dvoch funkcií, pričom každá z týchto funkcií je funkciou jednej premennej,

$$u(x,t) = \phi(x)G(t). \tag{5}$$

Dosadíme teda (5) do (1). Derivovaním (5) podľa t a dva krát podľa x dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \phi(x)\frac{dG}{dt},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2\phi}{dx^2}G(t)$$

a rovnica (1) prejde na tvar

$$\phi(x)\frac{dG}{dt} = kG(t)\frac{d^2\phi}{dx^2}. \tag{6}$$

V ňom si všimneme, že môžeme „odseparovať“ funkcie závislé od x a od t tak, aby funkcie jednej konkrétnej premennej boli na jednej strane rovnice. Konštanty možno v princípe umiestniť ľubovoľne. My si zvolíme nasledovný tvar po odseparovaní premenných

$$\frac{1}{kG}\frac{dG}{dt} = \frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2}. \tag{7}$$

Na ľavej strane rovnosti máme teda funkciu od t a na pravej funkciu od x. Keďže x od t nezávisí a ani t od x nezávisí, z rovnosti (7) dostaneme, že funkcie na oboch stranách tejto rovnosti musia byť rovné rovnakej konštante. Z istých dôvodov označme túto konštantu $-\lambda$. Týmto spôsobom sme dostali z parciálnej diferenciálnej rovnice (1) dve obyčajné diferenciálne rovnice

$$\frac{1}{kG}\frac{dG}{dt} = -\lambda$$
$$\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda$$

resp. po úprave

$$\frac{dG}{dt} = -\lambda kG \tag{8}$$
$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi \tag{9}$$

Pozrime sa, čo pre funkcie ϕ a G vieme získať z okrajových podmienok (2) a (3). Z (2) máme že $\phi(0)G(t) = 0$ pre každé $t > 0$. To je možné práve vtedy, keď $\phi(0) = 0$ alebo $G(t) = 0$ pre všetky $t > 0$. V prípade $G(t) = 0$ pre všetky $t > 0$ hneď dostaneme, že riešenie $u(x,t) = 0$ pre všetky x a t je riešením rovnice 1 s okrajovými podmienkami (2) a (3). Takéto riešenie nazývame triviálnym riešením uvedenej parciálnej diferenciálnej rovnice s okrajovými podmienkami. Takže netriviálny prípad môžeme dostať pre $\phi(0) = 0$.

Z druhej okrajovej podmienky (3) získame $\phi(L)G(t) = 0$ a podobnou úvahou ako v predošlom odstavci prídeme k záveru, že $\phi(L) = 0$.

Pre diferenciálnu rovnicu (8) nemáme tým pádom (zatiaľ) žiadne podmienky, zato pre rovnicu (9) sme získali dve okrajové podmienky $\phi(0) = 0$ a $\phi(L) = 0$.

Všeobecné riešenie rovnice (8) je dobre známe,

$$G(t) = ce^{-\lambda kt}, \tag{10}$$

kde e je Eulerovo číslo a c je ľubovoľná konštanta. Časovo závislá zložka riešenia je teda exponenciálna funkcia. Tu konštanta λ určuje správanie funkcie

$G(t)$. Zrejme z fyzikálneho hľadiska pri nami namodelovanej situácii neočakávame exponenciálny rast (keď $\lambda < 0$), takže máme $\lambda \geq 0$. Tento fakt neskôr vyplynie aj z formálnych argumentov.

Pozrime sa ďalej na priestorovú zložku riešenia, ktorá je určená obyčajnou diferenciálnou rovnicou druhého stupňa (9) s okrajovými podmienkami (tzv. okrajová úloha),

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi \tag{11}$$

$$\phi(0) = 0 \tag{12}$$

$$\phi(L) = 0 \tag{13}$$

Na rozdiel od začiatočnej úlohy (t.j. obyčajnej diferenciálnej rovnice so začiatočnými podmienkami) pre ktorú je existencia a jednoznačnosť riešenia v princípe zaručená, pre okrajové úlohy neexistuje jednoduchá teória, ktorá by zaručovala existenciu a jednoznačnosť riešení takýchto úloh. Čo vieme v našom prípade určite povedať, že funkcia $\phi(x) = 0$ pre každé x je určite riešením (11) spĺňajúca (12) a (13). Toto riešenie voláme triviálne riešenie okrajovej úlohy a zodpovedá triviálnemu riešeniu rovnice vedenia tepla. Otázka je, či existujú aj nejaké netriviálne riešenia uvedenej okrajovej úlohy. Ukáže sa, že áno, avšak existencia ďalších riešení bude závisieť od hodnoty konštanty λ. Tieto hodnoty λ nazývame vlastné hodnoty a príslušné riešenia okrajovej úlohy nazývame vlastné funkcie.

Všeobecné riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice druhého rádu (11) spočítame štandardným spôsobom. Charakteristická rovnica asociovaná s rovnicou (11) je $r^2 = -\lambda$. V závislosti od λ dostávame

- dva rýdzo imaginárne korene $r = \pm i\sqrt{\lambda}$ ak $\lambda > 0$,
- dvojnásobný koreň $r = 0$, ak $\lambda = 0$,
- dva rôzne reálne korene $r = \pm\sqrt{-\lambda}$, ak $\lambda < 0$.

Všeobecné riešenie (11) bude potom závisieť od λ. Pozrime sa na jednotlivé prípady.

$\boldsymbol{\lambda > 0}$ Pre tento prípad máme dve nezávislé riešenia rovnice (11), $e^{i\sqrt{\lambda}x}$ a $e^{-i\sqrt{\lambda}x}$. Pomerne jednoducho vidno, že ľubovoľná lineárna kombinácia týchto riešení je tiež riešenie rovnice (11). Preto z Eulerovho vzťahu $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ môžeme všeobecné riešenie ϕ rovnice (11) napísať v tvare

$$\phi = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Z okrajovej podmienky $\phi(0) = 0$ dostaneme že c_1=0, takže

$$\phi(x) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Druhá okrajová podmienka $\phi(L) = 0$ vedie k rovnici

$$0 = c_2 \sin \sqrt{\lambda} L,$$

čiže

$$\sqrt{\lambda} L = \pi n,\ n = 1, 2, \ldots,$$

a preto vlastné hodnoty sú

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\ n = 1, 2, \ldots,$$

a vlastná funkcia prislúchajúca vlastnej hodnote $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ je

$$\phi(x) = c_2 \sin \sqrt{\lambda_n} x = c_2 \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

$\boldsymbol{\lambda = 0}$ V tomto prípade rovnica (11) bude

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0,$$

ktorej jej všeobecné riešenie je

$$\phi = c_1 + c_2 x$$

Okrajové podmienky $\phi(0) = 0$ a $\phi(L) = 0$ implikujú $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$. Preto v tomto prípade dostávame len triviálne riešenie $\phi = 0$ a $\lambda = 0$ nepovažujeme za vlastnú hodnotu.

$\boldsymbol{\lambda < 0}$ Dve nezávislé riešenia rovnice (11) v tomto prípade sú $e^{\sqrt{-\lambda}}$ a $e^{-\sqrt{-\lambda}}$. Kvôli zjednodušeniu zápisu zaveďme substitúciu $s = -\lambda$. Potom uvedené riešenia budú mať tvar $e^{\sqrt{s}}$ a $e^{-\sqrt{s}}$, $s > 0$ a všeobecné riešenie bude

$$\phi = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}.$$

Kvôli ďalšej analýze s využitím faktu, že ľubovoľná lineárna kombinácia uvedených riešení rovnice (11) je riešenie rovnice (11) prepíšeme uvedené všeobecné riešenie do iného tvaru. Na to využijeme funkcie hyperbolický sínus a hyperbolický kosínus

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

ktoré sú lineárnymi kombináciami pôvodných exponenciálnych funkcií, a teda sú tiež riešením rovnice (11). Získame tak riešenie v tvare

$$\phi = c_3 \cosh \sqrt{s}x + c_4 \cosh \sqrt{s}x$$

Z okrajovej podmienky $\phi(0) = 0$ a z faktu, že $\cosh 0 = 1$ a $\sinh 0 = 0$ dostaneme $c_3 = 0$ a predpis pre ϕ

$$\phi = c_4 \sinh \sqrt{s}x$$

Z okrajovej podmienky $\phi(L) = 0$ získame rovnicu

$$0 = c_4 \sinh \sqrt{s}L.$$

Buď je teda $c_4 = 0$ a vtedy je $\phi = 0$ triviálne riešenie, alebo v opačnom prípade, keďže funkcia $\sinh x$ je nulová len pre $x = 0$, ľahko odvodíme, že $s = 0$ a opäť bude $\phi = 0$.

Tým sme ukázali, že zaujímavé netriválne riešenia rovnice (11) dostaneme len pre $\lambda > 0$.

Okrajová úloha

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} &= -\lambda\phi \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0 \end{aligned}$$

Vlastné hodnoty

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\ n = 1, 2, \dots,$$

Vlastné funkcie

$$\phi_n(x) = c_2 \sin \frac{n\pi}{L}x,\ c_2 \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \dots, .$$

Teraz sa môžeme vrátiť späť k rovnici vedenia tepla (1) s okrajovými podmienkami (2) a (3). Riešenie sme hľadali metódou separácie premenných v tvare $u(x,t) = \phi(x)G(t)$. Po dosadení G z (10) a ϕ dostaneme, že riešením rovnice vedenia tepla (1) s s okrajovými podmienkami (2) a (3) je funkcia

$$u(x,t) = B \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \; B \in \mathbb{R}, \; n = 1, 2, \dots. \tag{14}$$

Samozrejme, rôznou voľbou n dostaneme rôzne riešenia.

Zatiaľ sme nebrali vôbec do úvahy začiatočnú podmienku. Ak do (14) dosadíme $t = 0$, dostaneme

$$u(x,0) = B \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Z toho sa môže zdať, že riešenie uvažovanej rovnice vedenia tepla s danými okrajovými podmienkami vieme nájsť len pre začiatočnú podmienku špeciálneho tvaru. Môžeme si však uvedomiť niekoľko vecí:

- Ak $u(x,t)$ a $v(x,t)$ sú riešenia rovnice vedenia tepla (1) s okrajovými podmienkami (2) a (3), tak aj $u(x,t) + v(x,t)$ je riešením.

Pomerne jednoducho je vidno, že vyššie uvedené tvrdenie je možné rozšíriť na ľubovoľný konečný počet riešení uvedenej rovnice vedenia tepla. Ak teda vezmeme počiatočnú podmienku v tvare

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{M} B_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

riešením problému (1), (2), (3), bude funkcia

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{M} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

Čiže riešenie rovnice vedenia tepla s okrajovými podmienkami (1), (2), (3) vieme nájsť ak začiatočná podmienka je v tvare konečnej lineárnej kombinácie sínusov.

To však určite nie sú všetky funkcie, takže je prirodzená otázka, čo v prípade, že ako začiatočná podmienka bude funkcia, ktorá nie je takouto konečnou lineárnou kombináciou. V takom prípade nám pomôže teória Fourierových radov, z ktorej vyplývajú nasledovné fakty

- Každú funkciu $f(x)$ (za určitých miernych obmedzení) je možné aproximovať konečnou lineárnou kombináciou sínusov $\sin \frac{n\pi x}{L}$.

- Aproximácia sa zlepšuje s rastúcim počtom členov lineárnej kombinácie.
- Pre $n \to \infty$ výsledný goniometrický rad konverguje (za určitých podmienok) k pôvodnej funkcii $f(x)$.

Ak prijmeme tieto tvrdenia, potom každú začiatočnú podmienku vieme zapísať v tvare radu

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

a riešenie rovnice vedenia tepla (1) s okrajovými podmienkami (2), (3), s vyššie uvedenou začiatočnou podmienkou je

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

Rovnica vedenia tepla, okrajové podmienky, začiatočná podmienka

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \\ u(L,t) &= 0, \\ u(x,0) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \end{aligned}$$

Riešenie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

Podobným spôsobom sa dá metóda separácie premenných použiť pri riešení rovnice vedenia tepla s okrajovými podmienkami

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0,x) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,x) &= 0, \end{aligned}$$

Pri rozklade $u(x,t) = \phi(x)G(t)$ dostaneme pre $G(t)$ rovnakým postupom ako v predchádzajúcom prípade

$$G(t) = ce^{-k\lambda t}$$

Pre $\phi(x)$ však získame nasledovnú okrajovú úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -\lambda\phi, \\ \frac{d\phi}{dx}(0) &= 0, \\ \frac{d\phi}{dx}(L) &= 0. \end{aligned}$$

Opäť je potrebné postupne uvažovať $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ a $\lambda < 0$.

V prípade $\lambda > 0$ je všeobecné riešenie pre ϕ

$$\phi = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Derivovaním dostaneme

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{\lambda}(-c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x).$$

Z okrajovej podmienky $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ hneď získame $c_2 = 0$. Druhá okrajová podmienka potom dáva

$$-\sqrt{\lambda}c_1 \sin\sqrt{\lambda}L = 0.$$

Netriviálne riešenie dostaneme pre $c_1 \neq 0$, preto musí byť $\sin\sqrt{\lambda}L = 0$. Z toho dostaneme vlastné hodnoty

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

a vlastné funkcie

$$\phi(x) = c_1 \cos\frac{n\pi x}{L}, \; n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Súčinové riešenie potom bude

$$u(x,t) = A\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

kde A je ľubovoľná konštanta.

V prípade $\lambda = 0$ dostávame okrajovú úlohu, ktorú sme už v inej súvislosti riešili. Zistili sme, že v tomto prípade existuje netriviálne riešenie, ktorým je ľubovoľná konštanta

$$\phi(x) = c_0.$$

Keďže pre $\lambda = 0$ je časová zložka $G(t) = c$, súčinové riešenie je

$$u(x,t) = A.$$

Pre $\lambda < 0$ sa dá opäť ukázať, že netriviálne súčinové riešenie neexistuje.

Ak si opäť uvedomíme fakt, že aj v tomto prípade súčet riešení je riešenie, môžeme riešenie $u(x,t)$ zapísať v tvare

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

Počiatočná podmienka $u(x,0) = f(x)$ bude splnená, pokiaľ $f(x)$ je tvaru

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Rovnica vedenia tepla, okrajové podmienky, začiatočná podmienka

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L,\ t > 0,\\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= 0,\\
\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) &= 0,\\
u(x,0) &= f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}.
\end{aligned}$$

Riešenie

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

Na záver si namodelujme časový vývoj teploty v tenkom kruhovom prstenci dĺžky (s obvodom) $2L$. Aby sme mohli použiť metódu separácie premenných potrebujeme zrejme poznať okrajové podmienky. Tie získame jednoducho tak, že prstenec v jednom mieste rozpojíme a budeme sa naň pozerať ako na priamu tenkú tyč dĺžky $2L$. Z istých dôvodov súradnice okrajov tejto tyče zvolíme $-L$ a L. Ak vezmeme do úvahy, že pôvodne táto tyč tvorila súvislý prstenec, tak v bodoch $-L$ a L dochádza k ideálnemu tepelnému kontaktu. To znamená, že okrajové teplota aj tepelný tok na okrajoch tyče $-L$ a L sú rovnaké, čiže

$$\begin{aligned} u(-L,t) &= u(L,t), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(-L,t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(L,t). \end{aligned}$$

Tento typ okrajových podmienok nazývame periodické okrajové podmienky. Celý model uvažovaného problému teda pozostáva z rovnice vedenia tepla a vyššie uvedených okrajových podmienok.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(-L,t) &= u(L,t), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(-L,t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(L,t). \end{aligned}$$

Riešenie budeme hľadať opäť v tvare súčinu $u(x,t) = \phi(x)G(t)$, pričom rovnako ako v predošlých prípadoch je $G(t) = ce^{-\lambda kt}$.

Príslušný okrajový problém pre ϕ bude

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -\lambda\phi \\ \phi(-L) &= \phi(L), \\ \frac{d\phi}{dx}(-L) &= \frac{d\phi}{dx}(L). \end{aligned}$$

Všeobecné riešenie je opäť

$$\phi = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

Po aplikácii okrajových podmienok pre $\lambda > 0$ získame dve rovnice

$$\begin{aligned} c_2 \sin\sqrt{\lambda}x &= 0 \\ c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x &= 0. \end{aligned}$$

Ak teda $\sin\sqrt{\lambda}x \neq 0$, tak $c_1 = c_2 = 0$ čím získame len triviálne riešenie. V prípade $\sin\sqrt{\lambda}x$ dostaneme vlastné hodnoty $\lambda = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Na konštanty c_1 a c_2 však nekladieme žiadne ďalšie podmienky a je možné ich voliť ľubovoľne. Preto za vlastné funkcie môžeme považovať funkcie

$$\phi(x) = \cos\frac{n\pi x}{L},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

a

$$\phi(x) = \sin\frac{n\pi x}{L},\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ľubovoľná lineárna kombinácia týchto vlastných funkcii (pre danú vlastnú hodnotu) je samozrejme opäť vlastná funkcia.

Pomerne jednoducho sa ukáže že pre $\lambda = 0$ dostaneme netriviálne riešenie

$$\phi(x) = c_1,$$

ktoré je tým pádom vlastnou funkciou zodpovedajúcou vlastnej hodnote $\lambda = 0$, a ďalej žiadne $\lambda < 0$ nie je vlastnou funkciou.

Pre každú z vlastných funkcii pre $\lambda > 0$ získame súčinové riešenie

$$u(x,t) = \cos\frac{n\pi x}{L}e^{-(n\pi/L)^2kt}$$

resp.

$$u(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}e^{-(n\pi/L)^2kt}$$

Preto všeobecné riešenie rovnice vedenia tepla na kruhovom prstenci bude

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}e^{-(n\pi/L)^2kt} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}e^{-(n\pi/L)^2kt}.$$

Počiatočnú podmienku $u(x,0) = f(x)$ je možné splniť, pokiaľ

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Rovnica vedenia tepla, okrajové podmienky, začiatočná podmienka

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L,\ t > 0,\\
u(-L,t) &= u(L,t),\\
\frac{\partial u}{\partial x}(-L,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(L,t),\\
u(x,0) &= f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}.
\end{aligned}$$

Riešenie

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

Literatúra

[1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.