0.1 Ortogonálne systémy funkcií

Pri hľadaní riešenia rovnice vedenia tepla s vhodnými okrajovými podmienkami sme ukázali, že jej riešenie vieme nájsť priamo, pokiaľ začiatočná podmienka má špeciálny tvar

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{1}$$

alebo

$$u(x,0) = f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \tag{2}$$

prípadne ich kombináciu

$$u(x,0) = f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{3}$$

Tieto podmienky vyzerajú na prvý pohľad dosť obmedzujúco. Avšak v skutočnosti je možné v tvare uvedených radov vyjadriť dostatočne veľkú triedu funkcií. Takže ak uveríme, že skoro každú funkciu vieme zapísať pomocou niektorého z vyššie uvedených radov, tak to čo potrebujeme nájsť sú koeficienty A_n a/alebo B_n. Na ich určenie využijeme fakt, že množina funkcií $\{\sin \frac{n\pi x}{L}; n = 1, 2, \dots\}$ a $\{\cos \frac{n\pi x}{L}; n = 1, 2, \dots\}$ tvoria takzvané ortogonálne systémy funkcií.

V algebre sa kolmosť (ortogonalita) dvoch vektorov určuje použitím skalárneho súčinu. V trojrozmernom vektorovom priestore V so zvolenou bázou ortonormálnych vektorov $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sa (štandardný) skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ spočíta ako

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ sú na seba kolmé, ak $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Na vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ sa môžeme pozerať ako na funkcie $U(x)$ a $V(x)$, kde $x \in \{1, 2, 3\}$ a $U(1) = u_1$, $U(2) = u_2$, $U(3) = u_3$ a podobne $V(1) = v_1$, $V(2) = v_2$ a $V(3) = v_3$. Spočítať skalárny súčin takto chápaných vektorov teda znamená postupne vynásobiť hodnoty funkcií pre zodpovedajúce si x a výsledky sčítať, symbolicky zapísané

$$U \cdot V = \sum_{i=1}^{3} U(i)V(i).$$

Pre „klasické“ funkcie f a g s rovnakým definičným oborom môžeme definovať skalárny súčin podobne, len súčet nahradíme integrovaním, čiže

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

samozrejme za predpokladu, že daný integrál existuje. Potom môžeme definovať kolmosť dvoch funkcii podobne ako pri vektoroch, teda f je kolmá na g, ak

$$f \cdot g = 0.$$

Systém funkcií $\{f_i; i \in J\}$ nazývame ortogonálny systém funkcií, ak $f_i \cdot f_j = 0$ pre $i \neq j$.

Pokiaľ vo vektorovom priestore V zvolíme ortogonálnu bázu $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ (uvedené vektory nemusia mať jednotkovú dĺžku) tak súradnice vektora $\boldsymbol{u} = \alpha_1\boldsymbol{b_1} + \alpha_2\boldsymbol{b_2} + \alpha_3\boldsymbol{b_3}$ vieme získať použitím skalárneho súčinu. Vynásobením vektora $\boldsymbol{u}$ bázovým vektorom $\boldsymbol{b_1}$ ortogonálnej bázy dostaneme

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b}_1 = \alpha_1\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \alpha_3\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1.$$

Potom z otogonality vektorov $\boldsymbol{b}_i$ máme $\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0$ a $\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0$. Takže

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b}_1 = \alpha_1\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1,$$

a preto

$$\alpha_1 = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}.$$

Podobným spôsobom je možné vyjadriť súradnice α_2 a α_3.

Analogicky môžeme vyjadriť koeficienty B_n a A_n z radov (1), (2) a (3). Platí totiž

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L/2 & m = n. \end{cases}$$

$$\int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L/2 & m = n \neq 0. \\ L & m = n = 0. \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L} = 0.$$

Systémy funkcií

$$\{\sin\frac{n\pi x}{L}; n = 1, 2, 3, \ldots; 0 < x < L\}$$
$$\{\cos\frac{n\pi x}{L}; n = 0, 1, 2, 3, \ldots; 0 < x < L\}$$
$$\{\sin\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{n\pi x}{L}; n = 0, 1, 2, 3, \ldots; -L < x < L\}$$

sú ortogonálne systémy funkcií.

Z toho sa pomerne jednoducho odvodia vyjadrenia koeficientov B_n, A_n v riešeniach rovnice vedenia tepla na intervale $0 < x < L$ s okrajovými podmienkami typu nulová teplota, resp. nulový tok

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$
$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L},$$
$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx,$$
$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,\ n > 0.$$

V prípade rovnice vedenia tepla na intervale $-L < x < L$ s periodickými okrajovými podmienkami sú koeficienty naslednovné

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

$$A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx,$$

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx,\ n > 0.$$

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\, dx,\ n > 0.$$