Cvičenie 6

1. Majme danú Laplaceovú rovnicu na obdĺžnikovej oblasti $0 \le x \le L$, $0 \le y \le H$ s nasledovnými okrajovými podmienkami

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,y) = g(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,H) = f(x)$$

   (a) Aká je podmienka riešiteľnosti tejto úlohy a jej fyzikálna interpretácia?

   (b) Ukážte, že $u(x,y) = A(x^2 - y^2)$ je riešenie ak $f(x)$ a $g(y)$ sú konštanty, ktoré spĺňajú podmienku riešiteľnosti.

   (c)* Vyriešte danú úlohu pre všeobecné $f(x)$, $g(x)$ spĺňajúce podmienku riešiteľnosti. (Návod: Využite časť (b) a fakt, že $f(x) = f_{av} + (f(x) - f_{av})$, kde $f_{av} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$.)

Pripomeňme, že prúdová funkcia pre problém obtekania valca s polomerom podstavy a je

$$\psi(r,\theta) = c_1 \ln\frac{r}{a} + U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta,$$

a zložky rýchlosti prúdenia v polárnych súradniciach sú

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

2. Nech u_θ je uhlová zložka rýchlosti tekutiny na valci ($r = a$). Nájdite body na valci (t.j. uhol θ), v ktorých má táto funkcia maximum a kde minimum.

3. Pre aké hodnoty θ bude $u_r = 0$ mimo povrchu valca. Pre tieto hodnoty θ nájdite hodnoty r, pre ktoré je aj $u_\theta = 0$.

4. Ukážte, že prúdová funkcia $\psi(r,\theta) = \alpha\frac{\sin\theta}{r}$ spĺňa Laplaceovu rovnicu. Ukážte, že prúdnice tejto prúdovej funkcie sú kružnice a načrtnite ich.

Literatúra

[1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.