Cvičenie 3

1. Uvažujme rovnicu vedenia tepla s okrajovými podmienkami a začiatočnou podmienkou
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u(0,t) &= 0\\ u(L,t) &= 0\\ u(x,0) &= f(x).\end{aligned}$$
   (a) Aká je celková tepelná energia v tyči v čase t?
   (b) Určte tepelný tok na okrajoch tyče $x = 0$ a $x = L$ v čase t. Fyzikálne zdôvodnite znamienka pre získané toky na okrajoch tyče pre začiatočnú podmienku $f(x) = \sin\frac{\pi x}{L}$ a $f(x) = \sin\frac{2\pi x}{L}$.
   (c) Aký je vzťah medzi časťou (a) a všeobecným výsledkom v časti (b)?*

2. Nájdite riešenie rovnice vedenia tepla s danými okrajovými podmienkami a začiatočnou podmienkou
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ \frac{\partial}{\partial x}u(0,t) &= 0\\ u(L,t) &= 0\\ u(x,0) &= f(x).\end{aligned}$$
   Návod: Použite metódu separácie premenných. Sú vlastné hodnoty $\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots$?

3. Spočítajte Fourierovu transformáciu funkcie
$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{inak.}\end{cases}$$

4. Ukážte, že Fourierova transformácia je lineárny operátor, t.j. $\mathcal{F}[af(x)+bg(x)] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$. Tu $\mathcal{F}[f]$ označuje Fourierovu transformáciu funkcie f.

5. Ukážte, že ak $F(\omega)$ je Fourierova transformácia funkcie $f(x)$, tak $F(\alpha\omega)$ je Fourierova transformácia funkcie $\frac{1}{\alpha}f(\frac{x}{\alpha})$.

Literatúra

[1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.