Cvičenie 2

1. Nájdite stacionárne rozdelenie teploty na jednorozmernej tyči s konštantnými tepelnými vlastnosťami, so začiatočnou podmienkou $u(x,0) = f(x)$, ak okrajové podmienky sú:

   (a) $Q = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0) = 0$, $u(L) = T$.

   (b) $Q = 0$, $u(0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L) = \alpha$.

   (c) $\frac{Q}{K_0} = 1$, $u(0) = T_1$, $u(L) = T_2$.

   (d) $Q = 0$, $u(0) = T$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L) + u(L) = 0$.

2. Majme ideálne tepelne izolovanú tyč s konštantným vnútorným zdrojom energie $Q_0 \neq 0$. Ukážte na tyči neexistuje stacionárne rozdelenie teploty. Uveďte krátky fyzikálny dôvod.

3. Nájdte stacionárne riešenie pre uvedenú rovnicu vedenia tepla s okrajovými podmienkami a začiatočnou podmienkou. Pre aké hodnoty parametra β existuje stacionárne riešenie. Fyzikálne zdôvodnite výsledok.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \beta.$$

4. Pre rovnicu vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   s okrajovými podmienkami

$$u(0,t) = 0 \qquad\qquad u(L,t) = 0$$

   nájdite riešenie, pre začiatočnú podmienku

   (a) $u(x,0) = 3\sin\frac{\pi x}{L} - \sin\frac{3\pi x}{L}$

   (b) $u(x,0) = 2\cos\frac{3\pi x}{L}$.

5. Uvažujme rovnicu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u.$$

   Pre okrajové podmienky

$$u(0,t) = 0 \qquad\qquad u(L,t) = 0$$

(a) nájdite všetky stacionárne riešenia pre $\alpha > 0$,

(b) vyriešte uvedenú rovnicu s danými okrajovými podmienkami a začiatočnou podmienkou $u(x,0) = f(x)$ pre $\alpha > 0$.

6. V prípade, že existuje stacionárne riešenie, vyriešte rovnicu vedenia tepla s časovo nezávislými okrajovými podmienkami a zdrojom

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x), \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

- $Q(x) = k$, $u(0,t) = A$, $u(L,t) = B$.
- $Q(x) = \sin\frac{2\pi x}{L}$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$.

V prípade, že stacionárne riešenie neexistuje transformujte uvedený problém na homogénny problém s homogénnymi okrajovými podmienkami a jeho riešenie nehľadajte.

Literatúra

[1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.