

0.1 Numerické metódy

Metóda konečných prvkov

Pri metóde konečných prvkov hľadáme aproximáciu riešenia použitím kombinácie konečného počtu funkcií. Uvedenú metódu si predstavíme na príklade Poissonovej rovnice s neznámou funkciou $u = u(x, y)$.

$$\nabla^2 u = f(x, y)$$

pričom $u = 0$ na hranici nejakej dopredu danej oblasti.

Zvolíme si konečný počet tzv. testovacích funkcií $T_j(x, y)$ (to, ako voliť testovacie funkcie si ukážeme neskôr), ktoré spĺňajú okrajovú podmienku a riešenie budeme hľadať v tvare

$$U(x, y) = \sum_{j=1}^n U_j T_j(x, y),$$

kde U_j sú zatiaľ neznáme reálne čísla. Zrejme takto zvolené "riešenie" nemôžeme jednoducho dosadiť do pôvodnej rovnice. Pôvodnú rovnicu najskôr transformujeme na tvar, ktorý sa nazýva slabá forma PDR. Princíp transformácie je nasledovný.

Pôvodnú rovnicu prenásobíme testovacou funkciou a zintegrujeme

$$\nabla^2 u T_j = f(x, y) T_j \quad (1)$$

$$\iint_R \nabla^2 u T_j dA = \iint_R f(x, y) T_j dA \quad (2)$$

Zo vzťahu

$$\nabla \cdot (T_i \nabla u) = T_i \nabla^2 u + \nabla T_i \cdot \nabla u$$

vyjadríme $T_i \nabla^2 u$ a dosadíme do (2)

$$\iint_R \nabla \cdot (T_i \nabla u) - \nabla T_i \cdot \nabla u dA = \iint_R f(x, y) T_i dA \quad (3)$$

Využitím Greenovej vety

$$\iint_R \nabla \cdot B dA = \oint_{\partial R} B \cdot \mathbf{n} ds$$

môžeme ľavú stranu (3) napísať ako

$$\oint_{\partial R} T_i \nabla u \cdot \mathbf{n} ds - \iint_R \nabla T_i \cdot \nabla u dA = \iint_R f T_i dA$$

a keďže T_j sú nulové na hranici oblasti (okrajová podmienka), krivkový integrál na ľavej strane bude nulový a výsledná slabá forma danej PDR bude

$$\iint_R \nabla T_i \cdot \nabla u \, dA = - \iint_R f T_i \, dA.$$

Zrejme ak u je riešením pôvodnej Poissonovej rovnice, tak je aj riešením slabej formy. Ak však teraz dosadíme $u = U$ do slabej formy, dostaneme po krátkej úprave

$$\sum_{j=1}^n U_j \iint_R \nabla T_i \cdot \nabla T_j \, dA = - \iint_R f T_i \, dA \quad (4)$$

V tomto poslednom výraze poznáme T_i, T_j a f , nezáme sú čísla U_j . Označme

$$K_{ij} = \iint_R \nabla T_i \cdot \nabla T_j \, dA$$

$$F_i = - \iint_R f T_i \, dA$$

Potom čísla K_{ij} definujú maticu $K = (K_{ij})$ (tzv. matica tuhosti – stiffness matrix) a ak $F = (F_i)$ je vektor pozostávajúci z čísel F_i a $U = (U_i)$, tak (4) je možné zapísať v maticovom tvare jednoducho ako

$$KU = F.$$

Riešením tejto maticovej rovnice získame hodnoty U_i .

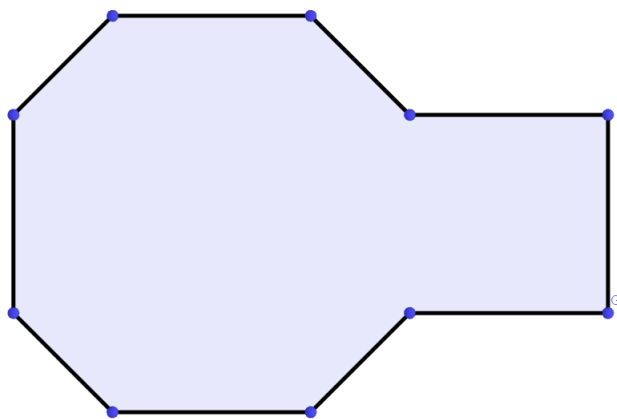
Ostáva vyriešiť otázku voľby testovacích funkcií. Ak by sme poznali ortogonálne vlastné funkcie ϕ_i

$$\nabla^2 \phi_i = \lambda_i \phi_i,$$

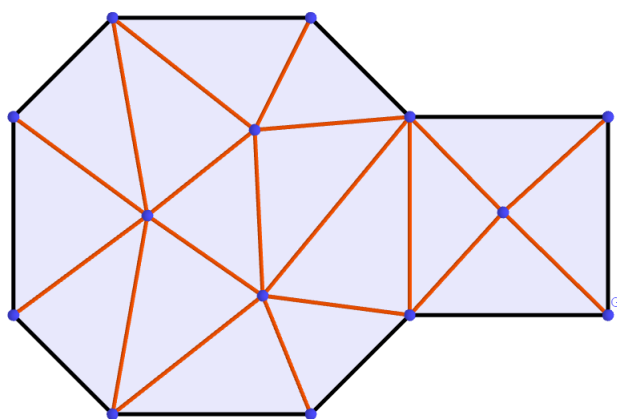
V tomto prípade pre $i \neq j$ je $K_{ij} = 0$ a matica K je preto diagonálna. V takom prípade je potom jednoduché získať U_i : $U_i = F_i / K_{ii}$.

Vlastné funkcie však pre všeobecnú oblasť poznáme málokedy.

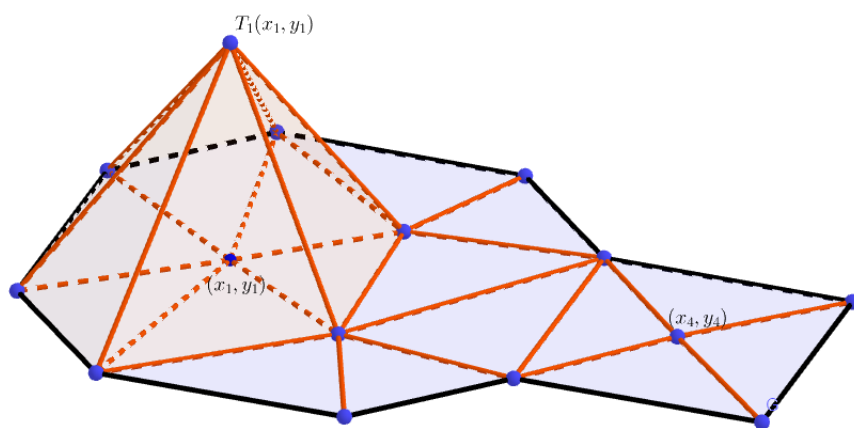
Ukážku voľby testovacích funkcií si predvedieme na oblasti z obrázka 1 a naše zadanie (0 na okraji). Danú oblasť najskôr triangulizujeme (rozdelíme na trojuholníky, obr. 2). Testovacie funkcie potom zvolíme tak, že v i -tom vnútornom bode, ktorý je vrcholom trojuholníka bude testovacia funkcia mať hodnotu 1, v ostatných vnútorných bodoch, ktoré sú vrcholmi trojuholníka bude mať hodnotu 0 a zvyšné hodnoty sa doplnia tak, aby graf tvorili časti rovín (trojuholníky) určené príslušnými susednými tromi bodmi (obr. 3) Výhodou tejto voľby je, že ak body (x_i, y_i) a (x_j, y_j) nie sú susedné (nie sú spojené hranou), súčin príslušných, vyššie uvedeným spôsobom vytvorených testovacích funkcií bude 0 a na príslušnom mieste matice K bude 0. Pri veľmi hustej triangulácii bude teda väčšina prvkov matice K rovná 0.



Obr. 1: Oblasť riešenia



Obr. 2: Triangulácia oblasti riešenia



Obr. 3: Príklad testovacej funkcie $T_1(x_1, y_1)$

Literatúra

- [1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.