0.1 Viacrozmerná vlnová rovnica

Kmitajúca membrána

Nech $u = u(x, y, t)$. Vlnová rovnica v 2D má tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Fyzikálne opisuje kmitanie tenkej, vhodne upevnenej membrány. Spôsob upevnenia je určený okrajovými podmienkami. V tejto časti sa pozrieme na prípad membrány obdĺžnikového tvaru, s nepohyblivými stranami,

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0, & u(x, 0, t) &= 0 \\ u(L, y, t) &= 0, & u(x, H, t) &= 0. \end{aligned}$$

a začiatočnou polohou a rýchlosťou

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \alpha(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= \beta(x, y). \end{aligned}$$

Keďže rovnica je lineárna a homogénna rovnako ako aj okrajové podmienky, použijeme metódu separácie premenných, $u(x, y, t) = \phi(x, y)h(t)$. Po odseparovaní voľbe separačnej konštanty dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h}{dt^2} &= -\lambda c^2 h \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= -\lambda \phi \end{aligned}$$

s okrajovými podmienkami pre ϕ

$$\begin{aligned} \phi(0, y) &= 0, & \phi(x, 0) &= 0 \\ \phi(L, y) &= 0, & \phi(x, H) &= 0 \end{aligned}$$

Na rovnicu pre ϕ je možné opäť aplikovať metódu separácie premenných s $\phi(x, y) = f(x)g(y)$ a separačnou konštantou μ. Po odseparovaní dostaneme rovnice

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\mu f$$

s okrajovými podmienkami

$$f(0) = 0 \qquad f(L) = 0$$

a

$$\frac{d^2g}{dy^2} = -(\lambda - \mu)g$$

s okrajovými podmienkami

$$g(0) = 0 \qquad\qquad g(H) = 0.$$

Rovnica pre f je klasický S-L okrajový problém, takže vieme, že f a μ sú

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{1}$$

$$f_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{2}$$

Pre každé prípustné n je potom rovnica pre g tiež S-L okrajový problém s vlastnými číslami $\lambda - \mu_n$. Takže pre g dostávame

$$\lambda_{mn} - \mu_n = \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2, \quad m = 1m2, 3, \dots$$

$$g_m(y) = \sin\frac{m\pi y}{H}.$$

potom

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2.$$

Z rovnice pre h vďaka tomu, že $\lambda_{mn} > 0$ dostávame riešenie

$$h(t) = c_1 \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t + c_2 \sin c\sqrt{\lambda_{mn}}t.$$

Potom výsledné riešenie je

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = &\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}\cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}\sin c\sqrt{\lambda_{mn}}t \end{aligned}$$

zo začiatočnej podmienky

$$u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\frac{m\pi y}{H} = \alpha(x,y)$$

dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{2}{H} \int_0^H \alpha(x,y) \sin \frac{m\pi y}{H}\, dy$$

a preto

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{2}{L} \int_0^L \left[\frac{2}{H} \int_0^H \alpha(x,y) \sin \frac{m\pi y}{H}\, dy \right] \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \\ &= \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H \alpha(x,y) \sin \frac{m\pi y}{H} \sin \frac{n\pi x}{L}\, dy\, dx \end{aligned}$$

Analogickým postupom využitím druhej začiatočnej podmienky získame vzťah pre koeficienty B_{mn}

$$c\sqrt{\lambda_{mn}} B_{mn} = \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H \beta(x,y) \sin \frac{m\pi y}{H} \sin \frac{n\pi x}{L}\, dy\, dx$$

Z tvaru $u(x,y,t)$ získame podobne a v jednorozmernom prípade módy vibrácií

$$\left(A_{mn} \cos c\sqrt{\lambda_{mn}} t + B_{mn} \sin c\sqrt{\lambda_{mn}} t \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H}.$$

Uzlové krivky módu sú množiny bodov, ktoré nekmitajú. Z predpisu pre mód vidno, že sú to body (x,y), pre ktoré $\sin \frac{n\pi x}{L} = 0$ a $\sin \frac{m\pi y}{H} = 0$. Pre prípad obdĺžnikovej membrány sú uzlové krivky úsečky rovnobežné so stranami obdĺžnika, ktoré rozdeľujú obdĺžnik na n častí vo vodorovnom smere a m častí vo zvislom smere.

V predchádzajúcom riešení sme videli, že výraz

$$\sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H}$$

je riešením rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h}{dt^2} &= -\lambda c^2 h \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= -\lambda \phi \end{aligned}$$

s príslušnými nulovými okrajovými podmienkami. V kompaktnejšej forme (a všeobecnejšej forme) sa táto rovnica dá napísať v tvare

$$\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0$$

a nazýva sa Helmholtzova rovnica. Okrajové podmienky majú pre oblasť R v rovine tvar

$$a\phi + b\nabla\phi \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0$$

Vlastnosti riešení Helmholtzovej rovnice majú vlastnosti podobné S-L rovnici

1. Všetky vlastné hodnoty sú reálne,

2. Existuje nekonečne veľa vlastných hodnôt, pričom existuje najmenšia a neexistuje najväčšia vlastná hodnota.

3. K jednej vlastnej hodnote môže prislúchať viac vlastných funkcií (rozdiel oproti S-L)

4. Vlastnými funkciami môžeme reprezentovať ľubovoľnú po častiach hladkú funkciu v zmysle

$$f(x,y) = \sum_{\lambda} a_\lambda \phi_\lambda(x,y)$$

   pričom v bodoch nespojitosti rad konverguje k priemeru limít zľava a sprava.

5. Vlastné funkcie prislúchajúce rôznym vlastným hodnotám sú ortogonálne s váhou $\sigma = 1$.

$$\iint_R \phi_{\lambda_1}\phi_{\lambda_2}\, dx\, dy = 0, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

   Navyše rôzne vlastné funkcie prislúchajúce tej istej vlastnej hodnote je možné ortogonalizovať. Takže systém všetkých vlastných funkcií môžeme považovať za ortogonálny systém funkcií.

6. Vzťah medzi vlastnou hodnotou λ a k nej prislúchajúcou vlastnou funkciou je určený Raileigho kvocientom, ktorý v 2D je

$$\lambda = \frac{-\oint_{\partial R} \phi\nabla\phi \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds + \iint_R |\nabla\phi|^2\, dx\, dy}{\iint_R \phi^2\, dx\, dy}$$

Priamym dôsledkom 6. pre $\nabla^2\phi + \lambda\phi = 0$ s $\phi = 0$ na celej hranici oblasti R je že $\lambda > 0$.

V nami počítanom prípade máme

1. $\lambda_{mn} = \lambda_{mn} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2$ sú reálne pre každé m a n.

2. Máme nekonečne veľa λ_{mn}, najmenšia je $\lambda_{1\,1}$

3. $\lambda_{4\,1} = \lambda_{2\,2}$ a

$$\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{4\pi y}{H} \neq \sin\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{2\pi y}{H}$$

5. Dôsledkom je možnosť vyjadrenia koeficientov v riešení

$$f = \sum_{\lambda} a_\lambda \phi_\lambda$$

priamo ako dvojné integrály

$$\iint_R f\phi_{\lambda_i}\,dx\,dy = \sum_\lambda a_\lambda \iint_R \phi_\lambda \phi\lambda_i = a_{\lambda_i}\iint_R \phi_{\lambda_i}^2\,dx\,dy$$

Kmitanie kruhovej membrány

V tomto prípade uvažujeme vlnovú rovnicu na kruhu s polomerom a, takže bude výhodné použiť polárne súradnice. Postup je veľmi podobný riešeniu rovnice vedenia tepla na kruhovej oblasti, takže výklad trochu urýchlime.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 u$$

s okrajovou podmienkou

$$u(a,\theta,t) = 0,$$

a začiatočnými podmienkami

$$u(r,\theta,0) = \alpha(r,\theta)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = \beta(r,\theta).$$

Po separácií $u(r,\theta,t) = \phi(r,\theta)h(t)$ dostaneme opäť rovnice

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h$$

a Helmholtzovu rovnicu v polárnom tvare

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \lambda\phi = 0.$$

Použijeme ďalšiu separáciu $\phi(r,\theta) = f(r)g(\theta)$ so separačnou konštantou μ, z ktorej odvodíme rovnice

$$\frac{d^2 g}{d\theta^2} = -\mu g,$$
$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) + (\lambda r^2 - \mu)f = 0$$

Pre rovnicu pre g podobnou úvahou ako pri riešení rovnice vedenia tepla získame periodické okrajové podmienky

$$g(-\pi) = g(\pi)$$
$$\frac{dg}{d\theta}(-\pi) = \frac{dg}{d\theta}(\pi)$$

Jednu okrajovú podmienku pre f máme z podmienky, že na ohraničujúcej kružnici je hodnota $u(a,\theta,t)$ nulová, a preto $f(a) = 0$. Druhú okrajovú podmienku možno zvoliť ako $|f(r)| < \infty$ z fyzikálnych dôvodov.

Potom rovnica z pre g s danými okrajovými podmienkami máme

$$\mu_m = m^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$
$$g_m(\theta) = \begin{cases} \sin m\theta, \\ \cos m\theta \end{cases}$$

Rovnicu pre f je možné transformovať na Besselovu rovnicu rádu m

$$z^2\frac{d^2 f}{dz^2} + z\frac{df}{dz} + (z^2 - m^2)f = 0, \qquad z = \sqrt{\lambda}r$$

z ktorej získame riešenia pre f

$$f(r) = c_1 J_m(\sqrt{\lambda}r) + c_2 Y_m(\sqrt{\lambda}r).$$

Keďže $|f(r)| < \infty$ a Y_m je neohraničená (J_m je ohraničená), tak $f(r) = c_1 J_m(\sqrt{\lambda}r)$. Z okrajovej podmienky $f(a) = 0$ potom máme, že

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{z_{mn}}{a}\right)^2$$

kde z_{mn} je n-tá nula funkcie $J_m(z)$.

Všeobecné riešenie pre h je opäť

$$h(t) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}ct + c_2 \sin\sqrt{\lambda}ct.$$

Kruhovo symetrický prípad

Hľadajme riešenie vlnovej rovnice na kruhovej oblasti, ktoré nezávisí od uhla θ, $u = u(r,t)$. Potom príslušná parciálna diferenciálna rovnica bude mať v polárnych súradniciach tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

Ako okrajovú podmienku opäť vezmeme $u(a,t) = 0$, t.j. membrána je upevnená na okraji. Začiatočné podmienky sú $u(r,0) = \alpha(r)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = \beta(r)$.

Metódou separácie premenných s $u(r,t) = \phi(r)h(t)$ získame rovnice

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 t,$$

a

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right) + \lambda r\phi = 0$$

s okrajovou podmienkou $\phi(a) = 0$ (a $|\phi(0)| = 0$) z teórie S-L rovníc je známe, že pre tento okrajový problém je $\lambda > 0$, takže substitúciou $\sqrt{\lambda}r = z$ získame rovnicu Besselovu rovnicu rádu 0

$$z^2\frac{d^2\phi}{dz^2} + z\frac{d\phi}{dz} + z^2\phi = 0.$$

Preto všeobecné riešenie pre ϕ je

$$\phi(r) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}r) + c_2 Y_0(\sqrt{\lambda}r)$$

z ohraničenosti ϕ v $r = 0$ dostávame $c_2 = 0$. Preto $\phi(r) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}r)$.

Z okrajovej podmienky $\phi(a) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}a) = 0$ dostávame, že $\lambda_n = \left(\frac{z_n}{a}\right)^2$, kde z_n je n-tá nula funkcie $J_0(z)$.

Výsledné riešenie vlnovej rovnice je potom

$$\begin{aligned} u(r,t) = &\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r)\cos c\sqrt{\lambda_n}t \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r)\sin c\sqrt{\lambda_n}t \end{aligned}$$

Zo začiatočných podmienok potom získame hodnoty A_n a B_n s využitím ortogonality Besselových funkcií s váhou r

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r) = \alpha(r),$$

preto

$$A_n = \frac{\int_0^a \alpha(r) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) r \, dr}{\int_0^a J_0(\sqrt{\lambda_n} r)^2 r \, dr}$$

a

$$c\sqrt{\lambda_n} B_n = \frac{\int_0^a \beta(r) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) r \, dr}{\int_0^a J_0(\sqrt{\lambda_n} r)^2 r \, dr}$$

Literatúra

[1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.