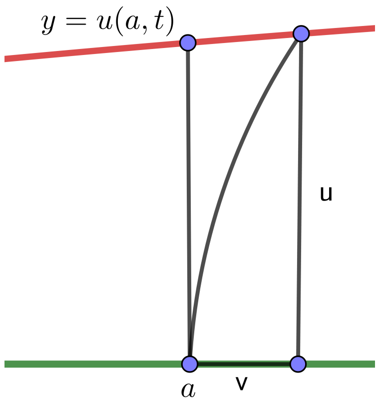
0.1 Vlnová rovnica

Odvodenie

Uvažujme natiahnutú strunu v stacionárnej pozícii s vhodne upevnenými koncami. Pre odvodenie vlnovej rovnice budeme predpokladať že sklon struny pri kmitaní bude malý. Vďaka tomu môžeme zanedbať horizontálnu zložku výchylky bodov struny. Budeme teda predpokladať, že body struny sa pohybujú vertikálne. Polohu bodu x vo vertikálnom smere v čase t označíme $y = u(x,t)$.



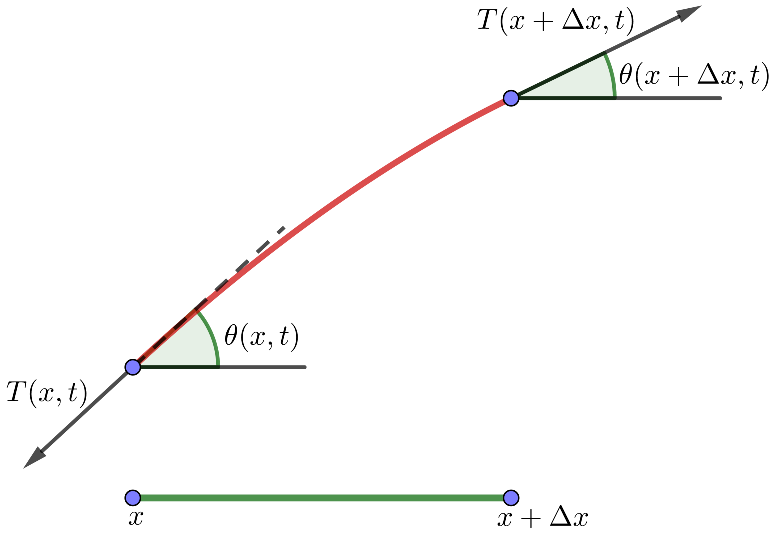
Obr. 1: Pre malý sklon struny, je možné zanedbať horizontálnu zložku v premiestnenia bodu struny.

Vezmime malý (infinitezimálny) úsek struny medzi x a $x + \Delta x$. Nech hustota struny je $\rho_0(x)$. Hmotnosť vybraného úseku struny je potom približne $\rho_0(x)\Delta x$. Zrýchlenie je dané pôsobiacimi silami, takže použijeme Newtonov zákon $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.

Potrebujeme teda poznať sily pôsobiace na daný úsek, pričom vzhľadom na predošlú poznámku, stačí skúmať len vertikálne zložky týchto síl.

Ak predpokladáme, že struna je ideálne pružná, potom sila, ktorou pôsobí zvyšok struny na konce vybraného úseku pôsobí v smere dotyčnice k strune v týchto koncoch. Veľkosť tejto sily označíme $T(x,t)$. Ďalej označme $\theta(x,t)$ uhol, ktorý zviera dotyčnica k strune v danom bode s vodorovnou priamkou (osou x). Pomocou tohoto uhla je potom možné získať vertikálne komponenty síl.

Ak y je výchylka bodu x struny v čase t tak smernicu dotyčnice v tomto



Obr. 2: Sily pôsobiace na krátky úsek struny. Výchylka je prehnaná kvôli zobrazeniu uhlov θ. $T(x, t)$ sú dĺžky vyznačených vektorov.

vychýlenom bode je možné spočítať ako $\tan\theta(x, t)$, ale tiež ako $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, čiže

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan\theta(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Z Newtonovho pohybového zákona dostaneme, že hmotnosť $\rho_0(x)\Delta x$ úseku vynásobená druhou deriváciou vertikálnej polohy bodu ($y = u(x, t)$) podľa času sa rovná výslednej sile pôsobiacej na úsek struny, čo sú vertikálne komponenty napäťových (ťahových?) síl a vertikálne komponenty ďalších síl pôsobiacich na strunu (napríklad gravitačná sila), čiže dostávame rovnosť

$$\rho_0(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x + \Delta x, t)\sin\theta(x + \Delta x, t) - T(x, t)\sin\theta(x, t) + \rho_0(x)\Delta x Q(x, t).$$

$Q(x, t)$ označuje veľkosť vertikálneho komponentu sily pôsobiacej na jednotku hmotnosti struny.

Vydelením Δx a limitným prechodom $\Delta x \to 0$ dostaneme

$$\rho_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}[T(x, t)\sin\theta(x, t)] + \rho_0(x)Q(x, t).$$

Keďže na začiatku sme predpokladali len malý sklon struny, tak

$$\sin\theta(x, t) \approx \tan\theta(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

a po nahradení v predošlej rovnosti dostávame rovnicu

$$\rho_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[T(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \rho_0(x)Q(x,t).$$

V prípade malých výchyliek môžeme pre ideálne pružnú strunu považovať $T(x,t)$ za konštantnú, $T(x,t) = T_0$. V tom prípade dostávame

$$\rho_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho_0(x)Q(x,t).$$

Ak jediná vonkajšia sila je gravitácia $Q(x,t) = -g$, pričom v prípade veľmi napnutej struny je $T_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \gg -g$, takže Q môžeme v takom prípade zanedbať a dostaneme

$$\rho_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

resp. po vydelení $\rho_0(x)$ a položení $c^2 = T_0/\rho_0(x)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Označenie $c^2 = T_0/\rho_0(x)$ je motivované jednotkami uvedeného podielu. T_0 je sila, čiže $T_0[kg\,m\,s^{-2}]$, $\rho_0(x)[kg\,m^{-1}]$ je hustota (jednorozmerná), takže ich podiel má jednotku $[m^2\,s^{-2}]$, čo je vlastne druhá mocnina rýchlosti. V prípade homogénnej struny je hustota konštantná a teda aj c^2 je konštanta.

Okrajové podmienky

Podobne ako v prípade rovnice vedenia tepla, riešenie vlnovej rovnice bude závisieť od obmedzení daných na koncoch struny. Prvý typ okrajových podmienok sú podmienky, ktoré určujú pohyb koncov struny vo vertikálnom smere. Pre strunu dĺžky L, ktorej konce sú $x = 0$ a $x = L$ sú to

$$u(0,t) = f(t), \qquad\qquad u(L,t) = g(t).$$

Pre špeciálny prípad $f(x) = g(x) = 0$ dostávame strunu s pevnými koncami.

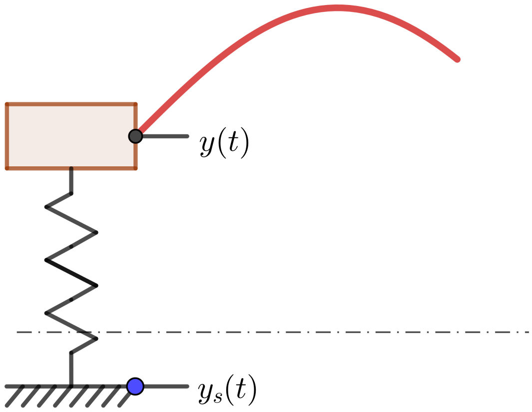
Zaujímavejšie okrajové podmienky dostaneme, ak je koniec struny pripevnený na nejaký dynamický systém. Tento typ podmienok ilustrujeme na príklade, keď koniec struny je upevnený na mechanický oscilátor (struna–závažie, spring–mass system, S–M).

Predpokladajme, že koniec struny $x = 0$ je upevnený na závažie takého mechanického oscilátora, ktorého pohyb je viazaný vo vertikálnom smere.

Dĺžku nenatiahnutej pružiny označme l a výchylku závažia (a tým pádom aj výchylku konca struny) označíme $y(t) = u(0,t)$. Potom z Hookovho zákona a Newtonovho zákona vieme, že

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k[y(t) - y_s(t) - l] + \text{ďalšie sily}, \tag{1}$$

kde m je hmotnosť závažia a $y_s(t)$ je poloha upevnenia pružiny (na opačnej strane než je závažie), ktorá sa tiež môže meniť v čase.



Obr. 3: Struna upevnená na dynamický systém.

Na závažie pôsobí kmitajúca struna silou v smere dotyčnice k strune v bode $x = 0$, ktorej veľkosť vo vertikálnom smere je $T(0,t)\sin\theta(0,t)$, čo je možné v prípade malého sklonu struny na okraji opäť nahradiť

$$T(0,t)\sin\theta(0,t) \approx T_0\tan\theta(0,t) = T_0\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)$$

Preto (1) môžeme prepísať na tvar $(y(t) = u(0,t))$

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t) = -k[u(0,t) - y_s(t) - l] + T_0\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + \text{ďalšie sily}$$

V špeciálnom prípade keď ďalšie pôsobiace sily sú nulové a závažie je dostatočne malé, takže sily pôsobiace na závažie sú v rovnováhe $(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0)$, získame **nehomogénnu elastickú podmienku**

$$T_0\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = k(u(0,t) - u_E(t))$$

kde $u_E(t) = y_s(t) + l$ je rovnovážna poloha závažia. Ak $u_E(t) = 0$, teda rovnovážna poloha výchylky súhlasí so stacionárnou výchylkou struny, dostávame **homogénnu elastickú podmienku**

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = k\,u(0,t)$$

V prípade takéhoto upevnenia na druhej strane struny možno odvodiť elastické podmienky

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -k(u(L,t) - u_E(t))$$

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -k\,u(L,t)$$

Pri týchto podmienkach je dôležité dodržať znamienka na pravej strane ($+$ pre $x = 0$, $-$ pre $x = L$).

Ďalším príkladom okrajových podmienok sú

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad \text{alebo} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

Vtedy hovoríme, že príslušný koniec struny je voľný. Túto voľnosť treba chápať tak, že koniec struny sa pohybuje vo vertikálnom smere bez trenia a iných pôsobiacich síl. Tieto podmienky sa dajú chápať ako limitný prípad elastických podmienok pre $k \to 0$

Fixované okraje

Poďme sa pozrieť na riešenie vlnovej rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L$$

s okrajovými podmienkami

$$u(0,t) = 0,$$
$$u(L,t) = 0.$$

Fyzikálne to zodpovedá kmitajúcej strune s pevne upevnenými nehybnými koncami (napríklad struna na gitare prípadne husliach je celkom dobrý model). Na úplné riešenie samozrejme potrebujeme ešte začiatočnú podmienku.

Pretože vychádzame z pohybovej rovnice, potrebujeme dve podmienky – začiatočnú polohu a začiatočnú rýchlosť

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = g(x).$$

Keďže uvedená rovnica je homogénna, lineárna a rovnaké vlastnosti majú aj uvedené okrajové podmienky, môžeme použiť metódu separácie premenných $u(x,t) = \phi(x)h(t)$. Po odseparovaní a voľbe separačnej konštanty dostaneme

$$\frac{1}{c^2 h}\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda$$

z okrajových podmienok potom dostávame Sturm-Liouvillov problém vlastných čísel pre ϕ

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{d\phi^2} &= -\lambda\phi \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0,\end{aligned}$$

ktorého vlastné čísla sú $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$ a vlastné funkcie $\phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$.

Pre h potom dostávame diferenciálne rovnice

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\lambda_n ch$$

a keďže $\lambda_n > 0$ pre všetky prípustné n, všeobecným riešením je

$$h(t) = c_1 \cos\frac{n\pi ct}{L} + c_2 \sin\frac{n\pi ct}{L}$$

Z princípu superpozície dostaneme riešenie vlnovej rovnice v tvare

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Koeficienty A_n a B_n získame zo začiatočných podmienok

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

čo je sínusový rad s koeficientami A_n, preto

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Z druhej začiatočnej podmienky

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

čo je opäť sínusový rad s koeficientami $B_n\frac{n\pi c}{L}$, preto

$$B_n\frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Pri pohľade na riešenie $u(x,t)$ si môžeme všimnúť, že kmitanie struny je lineárnou kombináciou jednoduchých kmitov

$$\sin\frac{n\pi x}{L}\left(A_n\cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n\sin\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Tieto kmity nazývame **normálne módy**. Ich amplitúdu vieme spočítať ako $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$. Ak fixujeme jeden vnútorný bod struny a všimneme časovú časť, tak si môžeme uvedomiť, že každý bod struny vykonáva jednoduchý kmitavý pohyb s **kruhovou frekvenciou** (kruhová frekvencia je počet kmitov za 2π jednotiek času) $\frac{n\pi c}{L}$, teda frekvencia kmitov je $\frac{nc}{2L}$ (vydeľte kruhovú frekvenciu číslom 2π). Tieto frekvencie nazývame **prirodzené frekvencie** (tzv. harmonické).

Pre $n = 1$ dostávame základnú frekvenciu, ktorej kruhová frekvencia je $\frac{c\pi}{L}$.

Pri aplikácii vyššie uvedených faktov pre prípad struny na gitare (husliach, prípadne iných strunových nástrojoch) máme, že základná frekvencia určuje základnú výšku tónu. Vyššie harmonické majú vplyv na farbu tónu. Tiež si môžeme všimnúť, že frekvenciu kmitov, a tým pádom výšku tónu môžeme meniť v princípe dvoma spôsobmi. Jedna je zmena konštanty $c = \sqrt{T_0/\rho_0}$ a keďže hustotu struny zmeníme ťažko, tak konštantu c v princípe meníme napínaním struny. Týmto spôsobom zvyčajne nástroj ladíme. Druhá možnosť je predlžovaním alebo skracovaním struny, čomu na nástroji zodpovedá samotné hranie, keď strunu skracujeme použitím prstov. Podobné princípy fungujú aj pre dychové nástroje, kde zvyčajne kmitá stĺpec vzduchu.

Literatúra

[1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.