0.1 Laplacova rovnica

Obdĺžniková oblasť

Podobne ako v prípade jednorozmernej rovnice vedenia tepla, môžeme hľadať stacionárne riešenie viacrozmernej rovnice vedenia tepla. Pre dvojrozmerný prípad máme teda $u = u(x, y)$ nezávislú od času a rovnica vedenia tepla prejde na tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Výraz $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sa štandardne označuje $\nabla^2 u$ (čita sa Laplas u). Rovnicu (1) nazývame Laplacova rovnica.

Poďme hľadať stacionárne riešenie rovnice vedenia tepla na obdĺžnikovej oblasti $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq H$, so zadanými teplotami na obvode obdĺžnika. Riešime teda úlohu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} u(0, y) &= g_1(y), & u(x, 0) &= f_1(x) \\ u(L, y) &= g_2(y), & u(x, H) &= f_2(x) \end{aligned}$$

Keďže okrajové podmienky nie sú homogénne, nemôžeme priamo použiť metódu separácie premenných. Avšak môžeme si uvedomiť, že ak máme riešenie Laplacovej rovnice, ktoré spĺňa nejaké okrajové podmienky a iné riešenie Laplacovej rovnice spĺňajúce iné okrajové podmienky, tak súčet týchto dvoch riešení bude riešenie Laplacovej rovnice, ktoré bude spĺňať okrajové podmienky, ktoré sú súčtom okrajových podmienok jednotlivých riešení.

Idea je teda hľadať napísať hľadané riešenie ako súčet štyroch funkcií $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y)$, pričom chceme, aby každá z nich riešila Laplacovu rovnicu a každá spĺňať práve jednu nehomogénnu podmienku originálnej funkcie. Dostaneme teda štyri úlohy:
Pre $u_1(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0,$$

$$u_1(x, 0) = f_1(x),$$
$$u_1(x, H) = u_1(0, y) = u_1(L, y) = 0$$

Pre $u_2(x,y)$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0,$$

$$u_2(x,H) = f_2(x),$$
$$u_2(x,0) = u_2(0,y) = u_2(L,y) = 0$$

Pre $u_3(x,y)$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0,$$

$$u_3(0,y) = g_1(y),$$
$$u_3(x,0) = u_3(x,H) = u_3(L,y) = 0$$

Pre $u_4(x,y)$

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} = 0,$$

$$u_4(L,y) = g_2(y),$$
$$u_4(x,0) = u_4(x,H) = u_4(0,y) = 0$$

Nájdime riešenie u_3, zvyšné riešenia sa vypočítajú analogicky.

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} u_3(0,y) &= g_1(y), & \qquad u_3(x,0) &= 0 \\ u_3(L,y) &= 0, & \qquad u_3(x,H) &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že máme dve homogénne okrajové podmienky pre premennú y, takže položíme $u_3(x,y) = h(x)\phi(y)$. Po dosadení do Laplacovej rovnice a odseparovaní premenných dostaneme

$$\frac{1}{h}\frac{d^2 h}{dx^2} = -\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dy} = \lambda,$$

kde λ je separačná konštanta (znamienko pri λ sme zvolili tak, že v okrajovom probléme pre ϕ bude vystupovať $-\lambda$). Z okrajových podmienok $u_3(x,0) = 0$, $u_3(x,H) = 0$ dostaneme okrajové podmienky pre ϕ, $\phi(0) = 0$ a $\phi(H) = 0$.

Pre ϕ riešime teda okrajovú úlohu

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} = -\lambda\phi$$
$$\phi(0) = 0$$
$$\phi(H) = 0.$$

Už vieme, že vlastné čísla takejto úlohy sú $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a príslušné vlastné funkcie sú $\phi_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{H}$.

Rovnica pre $h(x)$ je teraz pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \lambda_n h \tag{2}$$

pričom z okrajovej podmienky $u_3(L, y) = 0$ dostávame podmienku $h(L) = 0$.

Keďže všetky λ_n sú kladné, všeobecné riešenie uvedenej rovnice je

$$h(x) = c_1 \cosh\sqrt{\lambda_n}x + c_2 \sinh\sqrt{\lambda_n}x.$$

Aj keď v princípe je možné použiť podmienku $h(L) = 0$ na určenie vzťahu konštánt c_1 a c_2, jednoduchší tvar riešenia dostaneme, keď si uvedomíme, že ak $h(x)$ je riešenie rovnice (2), tak aj $h(x-a)$ pre ľubovoľné reálne číslo a je riešením rovnice (2). To možno nahliadnuť použitím substitúcie $t(x) = x-a$, vtedy

$$\frac{dh(t)}{dx} = \frac{dh}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dh}{dt}$$

takže derivácie podľa x v rovnici (2) je možné beztrestne nahradiť deriváciou podľa t.

Vezmime teda riešenie v tvare

$$h(x) = c_1 \cosh\sqrt{\lambda_n}(x-L) + c_2 \sinh\sqrt{\lambda_n}(x-L).$$

Keďže $0 = h(L) = c_1\cosh(0) + c_2\sinh(0) = c_1$ dostávame riešenie $h_n(x) = c_n \sinh\sqrt{\lambda_n}(x-L)$ (pre každé n dostaneme inú rovnicu, a teda aj inú konštantu c_2, tieto konštanty sme označili c_n).

Použitím princípu superpozície dostaneme riešenie $u_3(x, y)$, ktoré je kombináciou súčinových riešení $h_n(x)\phi_n(y)$

$$u_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\frac{n\pi(x-L)}{H}\sin\frac{n\pi y}{H}$$

Na získanie koeficientov A_n použijeme poslednú podmienku $u_3(0,y) = g_1(y)$,

$$u_3(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi(-L)}{H} \sin \frac{n\pi y}{H} = g_1(y)$$

Na tento rad sa teda môžeme pozerať ako na sínusový rad funkcie $g_1(y)$ s koeficientami $A_n \sinh \frac{n\pi(-L)}{H}$, takže

$$A_n \sinh \frac{n\pi(-L)}{H} = \frac{2}{H} \int_0^H g_1(y) \sin \frac{n\pi y}{H}\, dy,$$

z čoho už ľahko dopočítame A_n.

Keď už poznáme riešenie pre $u_3(x,y)$, ľahko si odvodíme tvar zvyšných riešení. Stačí si uvedomiť, aký okrajový problém budeme riešiť pre ktorú premennú a či pre druhú premennú budeme riešenie posúvať alebo nie. Takže pre $u_1(x,y)$ si všimneme, že dve homogénne okrajové podmienky máme pre premennú x, takže $\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$ a homogénna podmienka pre y je $u_1(x,H)$, takže riešenie pre h (až na násobok konštantou) je $h_n(y) = \sinh \frac{n\pi(y-H)}{L}$. Preto

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi(y-H)}{L} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

pričom

$$B_n \sinh \frac{n\pi(-H)}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

získame podobnou úvahou ako pri A_n.

Podobne

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi y}{L} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

tu $h_n(y) = \sinh \frac{n\pi y}{L}$, pretože $u_2(x,0) = 0$ je jediná homogénna podmienka pre y v $y = 0$, takže nedochádza k posunu, a ďalej

$$C_n \sinh \frac{n\pi H}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L f_2(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

a nakoniec

$$u_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh \frac{n\pi x}{H} \sin \frac{n\pi y}{H},$$

$$D_n \sinh \frac{n\pi L}{H} = \frac{2}{H} \int_0^H g_2(y) \sin \frac{n\pi y}{H}\, dy$$

Literatúra

[1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.