0.1 Rovnica vedenia tepla na dvojrozmerných oblastiach

Kruhová oblasť

Poďme sa pozrieť, ako bude vyzerať riešenie, ak oblasť, na ktorej riešenie budeme hľadať má tvar kruhu. Zaujíma nás teda riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

pričom $x^2 + y^2 \leq a^2$ s okrajovou podmienkou

$$u(x, y, t) = 0$$

na kružnici $x^2 + y^2 = a^2$.

V tomto prípade je lepšie pracovať v polárnych súradniciach, ktoré kruh $x^2 + y^2 \leq a^2$ transformujú na obdĺžnik $0 \leq r \leq a$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Po transformácii súradníc bude mať rovnica vedenia tepla tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right]$$

pričom $u = u(r, \theta, t)$. Z okrajovej podmienky v (x, y) získame okrajovú podmienku v (r, θ)

$$u(a, \theta) = 0.$$

Potrebujeme okrajové podmienky aj na zvyšných stranách obdĺžnika $u(0, \theta, t)$, $u(r, -\pi, t)$ a $u(r, \pi, t)$. V polárnych súradniciach je $u(0, \theta, t)$ teplota v strede kruhu. Z fyzikálnych dôvodov môžeme teda predpokladať, že táto teplota je ohraničená, $|u(0, \theta)| < \infty$. Keďže v polárnych súradniciach $u(r, -\pi, t)$ a $u(r, \pi, t)$ zodpovedajú teplotám v tých istých bodoch, musia sa nutne rovnať

$$u(r, -\pi, t) = u(r, \pi, t)$$

a tiež

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi, t) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi, t)$$

z dôvodu, že aj tepelný tok v týchto bodoch (resp. ľubovolných okoliach týchto bodov) je spojitý.

Chceme teda riešiť

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right]$$

s okrajovými podmienkami

$$\begin{aligned} u(a,\theta,t) &= 0, \\ u(r,-\pi,t) &= u(r,\pi,t) \\ \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,-\pi,t) &= \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi,t) \\ |u(0,\theta)| &< \infty \end{aligned}$$

Okrajové podmienky sú lineárane (aj posledná – lineárna kombinácia ohraničených funkcií je ohraničená) a prvé tri sú homogénne, použime teda separáciu premenných, $u(r,\theta,t) = \phi(r,\theta)h(t)$. Po dosadení do rovnice vedenia tepla a odseparovaní premenných dostaneme separované rovnice (so separačnou konštantou $-\lambda$)

$$\frac{1}{kh}\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\phi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right] = -\lambda$$

Pre časovú zložku $h(t)$ tak dostávame rovnicu

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda k h$$

a pre priestorovú zložku $\phi(x,y)$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\lambda\phi$$

po ďalšej separácii $\phi(r,\theta) = f(r)g(\theta)$ získame (separačnú konštantu zvolíme ako μ, lebo pre g dostaneme okrajový problém s periodickými okrajovými podmienkami)

$$-\frac{1}{g}\frac{d^2 g}{d\theta^2} = \frac{r}{f}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) + \lambda r^2 = \mu$$

z čoho získame rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{d\theta} &= -\mu g, \\ r\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) + (\lambda r^2 - \mu)f &= 0 \end{aligned}$$

Rovnica pre g, spolu s okrajovými podmienkami (ktoré získame z periodických okrajových podmienok pre u) tvorí okrajový problém

$$\frac{d^2g}{d\theta} = -\mu g,$$
$$g(-\pi) = g(\pi),$$
$$\frac{dg}{d\theta}(-\pi) = \frac{dg}{d\theta}(\pi)$$

Vlastné hodnoty pre tento problém sú $\mu_m = \left(\frac{m\pi}{\pi}\right) = m^2$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ a vlastné funkcie sú $g_0(\theta) = 1$, a $g_m(\theta) = \cos m\theta$ alebo $g_m(\theta) = \sin m\theta$ pre $m > 0$.

Pre každé μ_m máme problém pre f

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) + (\lambda r^2 - m^2)f = 0 \qquad \text{(PVH)}$$
$$f(a) = 0,$$
$$|f(a)| < \infty.$$

Po vydelení r dostávame Sturm-Liouvillovu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) + (\lambda r - \frac{m^2}{r})f = 0,$$
$$f(a) = 0,$$
$$|f(a)| < \infty.$$

ktorý nie je regulárny Sturm-Liouvillov problém, avšak napriek tomu pre tento prípad platí nasledovné

- Existuje nekonečne veľa vlastných hodnôt λ_{mn} a vlastných funkcií $f_{mn}(r)$.
- Pre pevne zvolené m sú tieto funkcie ortogonálne s váhou r, čiže

  $$\int_0^a f_{mn_1}(r) f_{mn_2}(r)\, r\, dr = 0, \qquad \text{pre } n_1 \neq n_2.$$

  (a je polomer kruhu).

Rovnicu (PVH) je možné upraviť na tvar (pravidlo pre deriváciu súčinu funkcii)

$$r^2\frac{d^2f}{dr^2} + r\frac{df}{dr} + (\lambda r^2 - m^2)f = 0$$

a substitúciou $z = \sqrt{\lambda} r$, pre $\lambda > 0$ získame Besselovu diferenciálnu rovnicu

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + (z^2 - m^2) f = 0.$$

Riešenia tejto rovnice sú Besselove funkcie. Rozlišujeme dva druhy Besselových funkcií

- Besselove funkcie 1. druhu $J_m(z)$ – nemajú singularitu v $z = 0$, t.j. $|J_m(z)| < \infty$,
- Besselove funkcie 2. druhu $Y_m(z)$ – majú singularitu v $z = 0$, t.j. $Y_m(z)$ sú neohraničené v ľubovoľnom okolí bodu $z = 0$.

Všeobecné riešenie Besselovej rovnice je kombináciou uvedených Besselových funkcií

$$f(z/\sqrt{\lambda}) = c_1 J_m(z) + c_2 Y_m(z).$$

a spätnou substitúciou pre z dostaneme

$$f(r) = c_1 J_m(\sqrt{\lambda} r) + c_2 Y_m(\sqrt{\lambda} r).$$

Okrajová podmienka $|f(0)| < \infty$ nám hovorí, že uvedené riešenie nemôže obsahovať Y_m, inak by bolo neohraničené, takže $c_2 = 0$. Podmienka $f(a) = 0$ nám dáva

$$0 = f(a) = c_1 J_m(\sqrt{\lambda} a).$$

Keďže voľba $c_1 = 0$ by nám dala triviálne riešenie ($f(r) = 0$, a teda aj $u = 0$), pre $c_1 \neq 0$ musí $J_m(\sqrt{\lambda} a) = 0$. To znamená, že $\sqrt{\lambda} a$ sú také hodnoty, v ktorých J_m je nulové. Označme z_{mn} n-tú takúto hodnotu pre J_m. Potom $z_{mn} = \sqrt{\lambda} a$, z čoho získame vlastné hodnoty

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{z_{mn}}{a} \right)^2.$$

a vlastné funkcie $f_{mn}(r) = J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r)$.

Riešenie pre časovú zložku h je $h(t) = e^{-\lambda_{mn} k t}$.

Výsledné riešenie rovnice vedenia tepla získame z princípu superpozície

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) \cos m\theta \, e^{-\lambda_{mn} k t} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}) \sin m\theta \, e^{-\lambda_{mn} k t}. \end{aligned}$$

Pokiaľ je zadaná začiatočná podmienka $u(r,\theta,0) = \alpha(r,\theta)$, koeficienty A_{mn} a B_{mn} sa dajú vyjadriť z

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,0) = &\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\cos m\theta \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}})\sin m\theta,
\end{aligned}
$$

čo môžeme chápať ako Fourierov rad s koeficientami

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) = U_m(r)$$

pri $\cos m\theta$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) = V_m(r)$$

pri $\sin m\theta$. Tieto koeficienty sú teda funkcie od závislé od r a s využitím ortogonality (s váhou r) Besselových funkcií potom máme

$$A_{mn} = \frac{\int_0^a U_m(r) J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\, r\, dr}{\int_0^a J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)^2\, dr}$$

a

$$B_{mn} = \frac{\int_0^a V_m(r) J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\, r\, dr}{\int_0^a J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)^2\, dr}$$

Literatúra

[1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.