0.1 Rovnica vedenia tepla na dvojrozmerných oblastiach

Obdĺžniková oblasť

Princíp odvodenia rovnice vedenia tepla na dvojrozmernej (trojrozmernej) oblasti je podobný ako v jednorozmernom prípade. Vychádza sa so zákona zachovania energie, čiže zmena tepelnej energie v danej oblasti sa rovná súčtu množstva tepelnej energie, ktorá pretečie cez okraj a množstvu tepelnej energie z vnútorných zd rojov.

Ak označíme $u(x,y,t)$ rozloženie teploty v oblasti R v čase t, tak celková energia v oblasti R bude

$$\iint_R c\rho u \, dS.$$

Vo viacrozmernom prípade je tok tepelnej energie možné chápať ako vektorové pole. Teda v každom bode (x,y) oblasti R je $\phi(x,y,t)$ vektor toku tepelnej energie. Pokiaľ $\hat{\boldsymbol{n}}$ označuje jednotkový vektor vonkajšej normály k okraju oblasti ∂R, tak množstvo tepelného toku ktoré pretečie okrajom oblasti R bude

$$\oint_{\partial R} \phi \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, d\gamma$$

Ak označíme funkciu zdroja vnútornej energie $Q(x,y,t)$, tak zo zákona zachovania dostaneme

$$\frac{d}{dt} \iint_R c\rho u \, dS = -\oint_{\partial R} \phi \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, d\gamma + \iint_R Q \, dS. \tag{1}$$

Krivkový integrál pre tok môžeme nahradiť plošným vďaka Greenovej vete

$$\oint_{\partial R} \phi \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, d\gamma = \iint_R \nabla \cdot \phi \, dS,$$

kde

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

čiže

$$\nabla \cdot \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Potom rovnosť (1) môžeme po nahradení krivkového integrálu plošným, výmenou derivácie a integrálu a presunutím na jednu stranu rovnosti upraviť na tvar

$$\iint_R c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \phi - Q \, dS = 0$$

z čoho teda dostávame, že integrand musí byť nulový, a teda

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \phi + Q.$$

Fourierov zákon vedenia tepla má pre viacrozmerné oblasti tvar

$$\phi = -K_0 \nabla u,$$

a po nahradení ϕ v predchádzajúcej rovnosti dostaneme rovnicu vedenia tepla v tvare

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (K_0 \nabla u) + Q.$$

Pre prípad nulových zdrojov vnútornej energie a konštantných tepelných vlastností je rovnicu vedenia tepla možné upraviť na tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla \cdot (\nabla u),$$

pričom (v dvojrozmernom prípade)

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Teda v tomto prípade je rovnicou vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Výraz $\nabla \cdot (\nabla u)$ sa štandardne označuje $\nabla^2 u$ a ∇^2 sa nazýva Laplaceov operátor.

Na úplné zadanie úlohy potrebujeme aj v tomto prípade okrajové podmienky a začiatočnú podmienku.

Začiatočná podmienka je zvyčajne tvaru $u(x, y, 0) = f(x, y)$.

Okrajové podmienky môžeme rozdeliť na dva typy – zadaná teplota alebo zadaný tok, t.j. $u(x, y, t) = g(x, y, t)$ pre $(x, y) \in \partial R$ alebo $\nabla u \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = h(x, y, t)$ pre $(x, y) \in \partial R$.

V rovnice je častokrát vhodné pracovať nie v karteziánskych súradniciach, ale v polárnych. V takom prípade bude mať rovnica vedenia tepla iný tvar, ktorý dostaneme zmenou súradníc. Rovnica vedenia tepla v polárnych súradniciach má tvar ($u = u(r, \theta, t)$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right]$$

Poďme sa pozrieť na riešenia rovnice vedenia tepla pre niektoré jednoduché oblasti.

Príklad: Rovnica vedenia tepla na obdĺžnikovej oblasti.

Hľadajme riešenie rovnice vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

na obdĺžniku $0 < x < L$, $0 < y < H$, s okrajovými podmienkami

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0, \\ u(L, y, t) &= 0, \\ u(x, 0, t) &= 0, \\ u(0, H, t) &= 0. \end{aligned}$$

a začiatočnou podmienkou $u(x, y, 0) = \alpha(x, y)$.

Zo zadania vidíme, že rovnica je homogénna a lineárna a okrajové podmienky sú tiež homogénne a lineárne. Môžeme teda použiť metódu separácie premenných. Napíšme teda $u(x, y, t) = \phi(x, y)h(t)$.

Po dosadení do rovnice vedenia tepla dostaneme (nebudem písať nezávislé premenné)

$$\phi\frac{dh}{dt} = kh\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)$$

a po odseparovaní a zvolení separačnej konštanty máme

$$\frac{1}{kh}\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\phi}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = -\lambda.$$

Dostávame tak dve rovnice

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda kh, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\lambda\phi. \tag{3}$$

Z okrajových podmienok pre u získame okrajové podmienky pre ϕ

$$\phi(0,y) = 0, \qquad \phi(x,0) = 0,$$
$$\phi(L,y) = 0, \qquad \phi(x,H) = 0.$$

Rovnica pre ϕ (3) je lineárna, homogénna a okrajové podmienky pre ϕ sú lineárne a homogénne. Môžeme teda opäť použiť metódu separácie premenných na (3), $\phi(x,y) = f(x)g(y)$,

$$g(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f(x)\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\lambda f(x)g(y).$$

Po odseparovaní premenných upravíme poslednú rovnosť na tvar so separačnou konštantou μ

$$\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2} = -\lambda - \frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dy^2} = -\mu$$

Spolu s (2) tak získavame tri rovnice

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda k h,$$
$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\mu f,$$
$$\frac{d^2 g}{dy^2} = -(\lambda - \mu)g$$

s okrajovými podmienkami pre f a g, ktoré získame z okrajových podmienok pre ϕ

$$f(0) = 0, \qquad g(0) = 0,$$
$$f(L) = 0, \qquad g(H) = 0.$$

Riešením rovnice pre h je exponenciálna funkcia $h(x) = ce^{-k\lambda t}$.

Okrajový problém pre f má vlastné čísla $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ a vlastné funkcie $f_n(x) = \sin n\pi x/L$, $n = 1, 2, \ldots$.

Pre každé vlastné číslo μ_n máme okrajový problém pre g, ktorého vlastné čísla a vlastné funkcie sú pre $m = 1, 2, \ldots$

$$\lambda - \mu_n = \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2, \qquad g_n(x) = \sin\frac{m\pi y}{H}.$$

Potom pre každé m, $n = 1, 2, \ldots$ dostávame vlastnú hodnotu

$$\lambda_{mn} = \mu_n + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2.$$

Súčinové riešenie pre $u = \phi(x, y)h(t) = f(x)g(y)h(t)$ je potom

$$u_{mn}(x, y, t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}e^{-k\lambda_{mn}t}$$

a z princípu superpozície získame riešenie

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}e^{-k\lambda_{mn}t}.$$

Pre začiatočnú podmienku $u(x, y, 0) = \alpha(x, y)$ vieme koeficienty A_{mn} vyjadriť nasledovným spôsobom

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H} = \alpha(x, y).$$

Vnútornú sumu označme

$$B_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Pre každé x je $B_m(x)$ koeficient v sínusovom rade funkcie α

$$\alpha(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x)\sin\frac{m\pi y}{H},$$

takže

$$B_m(x) = \frac{2}{H}\int_0^H \alpha(x, y)\sin\frac{m\pi y}{H}\,dy$$

po napísaní $B_m(x)$ ako sumy, teda máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{2}{H}\int_0^H \alpha(x, y)\sin\frac{m\pi y}{H}\,dy.$$

Koeficienty A_{mn} sú teda koeficienty sínusového radu funkcie na pravej strane poslednej rovnosti, preto

$$\begin{aligned}A_{mn} &= \frac{2}{L}\int_0^L \left(\frac{2}{H}\int_0^H \alpha(x, y)\sin\frac{m\pi y}{H}\,dy\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\\ &= \frac{4}{LH}\int_0^L\int_0^H \alpha(x, y)\sin\frac{m\pi y}{H}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dy\,dx\end{aligned}$$

Literatúra

[1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.