Maticové normy-opakovanie

Označme K vektorové pole reálnych čísel a $K^{m\times n}$ vektorový priestor $m\times n$ matíc nad poľom K. Maticová norma je zobrazenie $||\cdot|| : K^{m\times n} \to \mathbb{R}$, ktorá spĺňa nasledovné vlastnosti:

Pre ľubovoľné $\alpha \in K$ a A, $B \in K^{m\times n}$,

1. $||\alpha A|| = |\alpha|\,||A||$
2. $||A+B|| \le ||A|| + ||B||$
3. $||A|| \ge 0$ a $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
4. $||AB|| \le ||A||\,||B||$

Lema. Označme $\rho(A)$ spektrálny polomer (štvorcovej) matice A, t.j. najväčšie vlastné číslo v absolútnej hodnote. Potom

$$\rho(A) \le ||A|| \tag{1}$$

pre každú maticovú normu.

Dôkaz. Označme $B = (v\ v\ \cdots v)$ maticu, ktorá má stĺpce rovné vlastnému vektoru v matice A. Potom $AB = \lambda B$, kde λ je vlastná hodnota prislúchajúca vlastnému vektoru v. Z toho

$$|\lambda|\,||B|| = ||\lambda B|| = ||AB|| \le ||A||\,||B||$$

takže $|\lambda| \le ||A||$ pre ľubovoľnú vlastnú hodnotu λ, teda aj pre maximálnu.

Príklady maticových noriem

Operátorová norma Ak $||\cdot||$ označuje vektorová norma na K^m a na K^n, pre maticu $A \in K^{m\times n}$ definujeme

$$||A|| = \sup\left\{\frac{||Ax||}{||x||}; x \in K^n, x \neq 0\right\}$$

Špeciálne pri použití p-noriem na K^n aj K^M, $(1 \le p \le \infty)$ dostávame

$$||A||_p = \sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{||x||_p=1}||Ax||$$

Dá sa ukázať

1. $||A||_1$ je maximum zo súčtov absolútnych hodnôt prvkov v stĺpcoch matice A.
2. $||A||_\infty$ je maximum zo súčtov absolútnych hodnôt prvkov v riadkoch matice A.
3. $||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(AA^*)}$

Frobéniová norma Pre maticu $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$$

Stabilita riešenia regulárnej sústavy

Začneme dvoma príkladmi

Príklad 1: Majme systém $Ax = b$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/1000 & 1 & 1+1/1000 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Jeho riešením je zrejme $(1,1)^T$. Pokiaľ trochu pozmeníme pravú stranu, $A\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/1000 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

získame riešenie $(1000/999, 998/999)^T$.

Relatívna chyba pravej strany je

$$|\Delta b|/|b| = |b - \tilde{b}|/|b| \approx 0.447 \cdot 10^{-3}$$

a relatívna chyba riešenia

$$|\Delta x|/|x| = |x - \tilde{x}|/|x| \approx 0.1 \cdot 10^{-2},$$

takže pomer relatívnej chyby riešenia ku relatívnej chybe pravej strany je

$$\frac{|\Delta x|/|x|}{|\Delta b|/|b|} \approx 2.24$$

Vidíme, že malá relatívna chyba pravej strany sa prejaví malou relatívnou chybov v riešení.

Príklad 2: Majme systém $Ax = b$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+1/1000 & 1 & 2+1/1000 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Jeho riešením je zrejme $(1,1)^T$. Ak však pozmeníme pravú stranu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+1/1000 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

dostaneme ako riešenie $(0,2)^T$. Podobnou analýzou ako v predošlom príklade dostaneme

$$|\Delta b|/|b| = |b - \tilde{b}|/|b| \approx 0.353 \cdot 10^{-3}$$
$$|\Delta x|/|x| = |x - \tilde{x}|/|x| = 1$$
$$\frac{|\Delta x|/|x|}{|\Delta b|/|b|} \approx 2829.1$$

takže relatívna chyba riešenia je v tomto prípade pri veľmi malej zmene pravej strany skoro 3000-násobkom relatívnej chyby pravej strany.

Pripomeňme, že dobre podmienený systém rovníc je taký systém rovníc, v ktorom pri malej zmene matice koeficientov a/alebo malej zmene pravej stany spôsobí len malú zmenu v riešení. Naopak zle podmienený systém rovníc je taký systém rovníc, v ktorom malá zmena koeficientov matice a/alebo pravej strany spôsobí veľkú zmenu riešenia systému. Podmienenosť systému nám teda hovorí, nakoľko môžeme veriť získanému riešeniu.

Ideu toho, čo sa vlastne deje nám môže dať nasledovná úvaha.

Majme systémy rovníc $A\bar{x} = b$ a $A\tilde{x} = \tilde{b}$, kde $\tilde{b} = b + \Delta b$. Potom

$$\tilde{x} = A^{-1}\tilde{b} = A^{-1}(b + \Delta b) = A^{-1}b + A^{-1}\Delta b = \bar{x} + A^{-1}\Delta b.$$

Takže ak A^{-1} bude mať veľké prvky, tak $A^{-1}\Delta b$ môže byť veľké aj pre malé Δb. V príkladoch vyššie máme

$$\begin{pmatrix} 1/1000 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1000}{999} & \frac{1000}{999} \\ \frac{1000}{999} & -\frac{1}{999} \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} 1 + 1/1000 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1001 \end{pmatrix}$$

Pozrime sa teda podrobnejšie na vzťah sústavy riešenia s presnou a pozmenenou maticou sústavy resp. pravou stranou. Máme teda systémy

$$A\bar{x} = b \tag{2}$$

$$(A + \Delta A)\tilde{x} = b + \Delta b \tag{3}$$

Pri pohľade na (3) vidíme problém. A je regulárna, ale $A + \Delta A$ už regulárna byť nemusí. Aby sme mohli pokračovať, potrebujeme zabezpečiť regularitu tejto pozmenenej matice. Platia však nasledujúce ekvivalencie

$$\begin{aligned} A + \Delta A \text{ je regulárna } &\Leftrightarrow A(I + A^{-1}\Delta A) \text{ je regulárna} \\ &\Leftrightarrow I + A^{-1}\Delta A \text{ je regulárna} \end{aligned}$$

To nám umožňuje využiť nasledovné tvrdenie

Veta. Ak $||X|| < 1$, tak $I - X$ je regulárna a $||I - X|| \leq \frac{1}{1-||X||}$

Dôkaz. Podľa predpokladu je $1 > ||X|| \geq \rho(X)$. Potom ale $I - X$ je regulárna, pretože X je podobná so svojim Jordanovým kanonickým tvarom $J(X) = PXP^{-1}$, ktorý má vlastné hodnoty na diagonále. Potom ale

$$I - X = I - P^{-1}J(X)P = P^{-1}(I - J(X))P$$

pričom P je regulárna a $I - J(X)$ je regulárna, pretože je horná trojuholníková s nenulovými prvkami na diagonále, keďže $\rho(X) < 1$.

Ďalej máme

$$\begin{aligned}(I-X)^{-1}(I-X) &= I\\ (I-X)^{-1}-(I-X)^{-1}X &= I\\ (I-X)^{-1} &= I+(I-X)^{-1}X\end{aligned}$$

Normovaním poslednej rovnosti dostaneme

$$||(I-X)^{-1}|| = || = I+(I-X)^{-1}X|| \leq ||I|| + ||(I-X)^{-1}||\,||X||$$

a úpravou

$$\begin{aligned}||(I-X)^{-1}|| - ||(I-X)^{-1}||\,||X|| &\leq 1\\ ||(I-X)^{-1}|| &\leq \frac{1}{1-||X||}\end{aligned}$$

dostávame tvrdenie.

Predpokladajme teda, že $||A^{-1}\Delta A|| \leq 1$. Potom

$$\begin{aligned}\Delta x = \tilde{x}-\bar{x} &= (A+\Delta A)^{-1}(b+\Delta b)-\bar{x} = (A+\Delta A)^{-1}[b+\Delta b-(A+\Delta A)\bar{x}]\\ &= (A+\Delta A)^{-1}(\Delta b-\Delta A\bar{x}) = (I+A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}(\Delta b-\Delta A\bar{x})\end{aligned}$$

Po aplikácii normy a predošlého tvrdenia dostaneme

$$||\Delta x|| \leq \frac{||A^{-1}||}{1-||A^{-1}\Delta A||}(||\Delta b|| + ||\Delta A||\,||\bar{x}||)$$

Označme relatívne chyby

$$R(A) = \frac{||\Delta A||}{||A||}, \qquad R(b) = \frac{||\Delta b||}{||b||}.$$

Potom

$$\begin{aligned}||\Delta x|| &\leq \frac{||A^{-1}||}{1-||A^{-1}\Delta A||}(R(b)||b|| + R(A)||A||\,||\bar{x}||)\\ &= \frac{||A||\,||A^{-1}||}{1-||A^{-1}\Delta A||}\left(R(b)\frac{||b||}{||A||} + R(A)||\bar{x}||\right)\end{aligned}$$

Z toho dostávame odhad pre relatívnu chybu riešenia

$$\begin{aligned}R(\bar{x}) = \frac{||\Delta x||}{||\bar{x}||} &= \frac{||A||\,||A^{-1}||}{1-||A^{-1}\Delta A||}\left(R(b)\frac{||b||}{||A||\,||\bar{x}||} + R(A)\right)\\ &\leq \frac{||A||\,||A^{-1}||}{1-||A^{-1}\Delta A||}\left(R(b)+R(A)\right)\end{aligned}$$

Ak sprísnime podmienku regularity $||A^{-1}\Delta A|| \leq ||A^{-1}||\,||\Delta A|| < 1$, tak

$$R(\bar{x}) \leq \frac{||A||\,||A^{-1}||}{1-||A^{-1}||\,||\Delta A||}\left(R(b)+R(A)\right) = \frac{||A||\,||A^{-1}||}{1-||A^{-1}||\,||\Delta A||}\left(R(b)+R(A)\right)$$

Označme $c(A) = ||A|| \, ||A^{-1}||$. Potom

$$R(\bar{x}) \leq \frac{c(A)}{1 - c(A)R(A)} \left(R(b) + R(A)\right)$$

Dosiahnutý výsledok zhrnieme v nasledujúcej vete

Veta a definícia. (Odhad relatívnej chyby riešenia) Nech A je regulárna matica a nech pre maticu ΔA platí $||A|| \, ||\Delta A|| < 1$. Potom $A + \Delta A$ je regulárna a pre relatívnu chybu riešenia sústavy $(A + \Delta A)\tilde{x} = (b + \Delta b)$ vzhľadom na sústavu $A\bar{x} = b$ platí

$$R(x) \leq \frac{c(A)}{1 - c(A)R(A)} \left(R(b) + R(A)\right)$$

Číslo $c(A)$ nazývame číslo podmienenosti matice A.

Poznámka:

- $c(A)$ závisí od použitej normy.
- V prípade veľkého rozdielu v prvkoch A a A^{-1} bude $c(A)$ veľké v ľubovoľnej norme.
- $c(A) \gg 1$ implikuje zlú podmienenosť.