Poissonova rovnica

n-rozmerná Poissonova rovnica je parciálna diferenciálna rovnica tvaru

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = f,$$

kde funkcie $v = v(x_1, \ldots, x_n)$ a $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ sú funkcie n premenných. Neznáma funkcia je funkcia v.

Jednorozmerná Poissonova rovnica

V prípade $n = 1$ dostávame Poissonovu rovnicu v tvare

$$-\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = f(x), \tag{1}$$

pričom budeme predpokladať, že $0 < x < 1$ a riešenie spĺňa okrajové podmienky $v(0) = v(1) = 0$. Tento analytický problém transformujeme na numerický použitím konečných diferencií.

V intervale $[0, 1]$ zvolíme $N + 2$ bodov $x_i = ih$, kde $h = \frac{1}{N+1}$ a i je celé číslo také, že $0 \leq i \leq N + 1$. Na zjednodušenie zápisu označme $v_i = v(x_i)$ a $f_i = f(x_i)$. Potom prvé derivácie funkcie v v bodoch $x = (i - 0.5)h$ a $x = (i + 0.5)h$ môžeme aproximovať ako

$$\left.\frac{dv(x)}{dx}\right|_{x=(i-0.5)h} \approx \frac{v_i - v_{i-1}}{h}, \qquad \left.\frac{dv(x)}{dx}\right|_{x=(i+0.5)h} \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{h}.$$

Potom

$$\frac{1}{h}\left(\left.\frac{dv(x)}{dx}\right|_{x=(i+0.5)h} - \left.\frac{dv(x)}{dx}\right|_{x=(i-0.5)h} \right) \approx \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}.$$

Druhú deriváciu preto môžeme aproximovať

$$\left.\frac{d^2 v(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} + \tau_i.$$

τ sa nazýva chyba orezania a je triedy $O(h^2 \|\frac{d^4 v}{dx^4}\|_\infty)$

Teraz môžeme (1) pre $0 \leq i \leq N+1$ v bodoch $x = x_i$ prepísať ako systém s rovnicami tvaru

$$-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1} = h^2 f_i + h^2 \tau_i.$$

Keďže z okrajových podmienok $v(0) = v(1) = 0$ dostávame $v_i = v_{N+1} = 0$, získavame N rovníc s n neznámymi $v_1, \dots, v_N$

$$T_n \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & & -1 \\ 0 & & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_N \end{pmatrix}$$

čiže v kompaktnom zápise

$$T_N v = h^2 f + h^2 \tau, \tag{2}$$

kde T_N je tridiagonálna matica s 2 na diagonále a -1 nad a pod diagonálou. Ak budeme predpokladať, že τ je oproti f malé, môžeme τ ignorovať a riešiť namiesto toho systém

$$T_N \hat{v} = h^2 f, \tag{3}$$

Dvojrozmerná Poissonova rovnica

Pozrime sa na prípad dvojrozmernej Poissonovej rovnice

$$-\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y), \tag{4}$$

definovanej v jednotkovom štvorci $\{(x,y); 0 < x, y < 1\}$ a s okrajovou podmienkou $v(x,y) = 0$ na hranici tohto štvorca.

Uzáver štvorca navzorkujeme podobne ako v jednorozmernom prípade, teda zvolíme krok $h = \frac{1}{N+1}$ a $x_i = ih$, $y_j = jh$, pričom $i, j = 0, \dots, N+1$ a označme $v_{ij} = v(x_i, y_j)$ a $f_{ij} = f(x_i, y_j)$.

Z úvah pre jednorozmernú Poissonovu rovnicu máme aproximácie druhých parciálnych derivácií

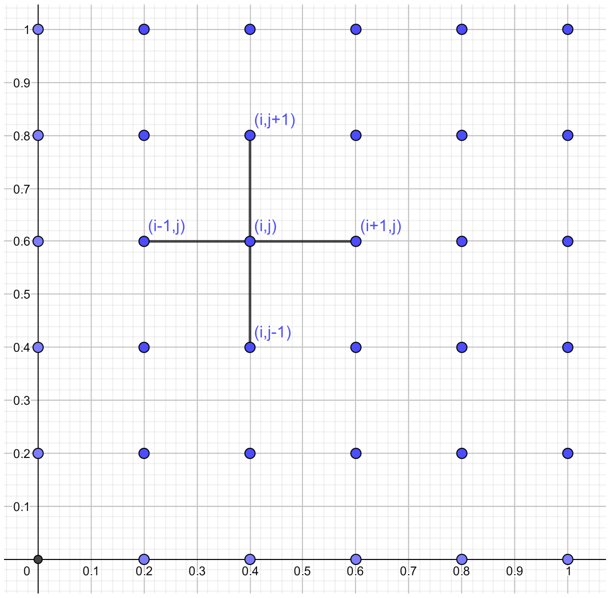
$$\begin{aligned} -\left.\frac{\partial^2 v(x,y)}{dx^2}\right|_{x=x_i, y=y_j} &\approx \frac{2v_{i,j} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j}}{h^2}, \\ -\left.\frac{\partial^2 v(x,y)}{dy^2}\right|_{x=x_i, y=y_j} &\approx \frac{2v_{i,j} - v_{i,j-1} - v_{i,j+1}}{h^2}, \end{aligned}$$

a ich sčítaním získame

$$- \left. \frac{\partial^2 v(x,y)}{dx^2} \right|_{x=x_i, y=y_j} - \left. \frac{\partial^2 v(x,y)}{dy^2} \right|_{x=x_i, y=y_j} \tag{5}$$

$$= \frac{4v_{i,j} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j} - v_{i,j-1} - v_{i,j+1}}{h^2} - \tau_{i,j}. \tag{6}$$

kde $\tau_{i,j}$ je opäť chyba orezania. Môžeme si všimnúť, že dvojice (i,j) vo vyjadrení (6) tvoria kríž (obrázok nižšie), ktorý voláme (5-bodová) šablóna. Z



okrajových podmienok máme $v_{0j} = v_{N+1,j} = v_{i,0} = v_{i,N+1} = 0$. Potom (6) určuje $n = N^2$ lineárnych rovníc

$$4v_{i,j} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j} - v_{i,j-1} - v_{i,j+1} = h^2 f_{ij}, \qquad 1 \le i,j \le N$$

Naším cieľom je prepísať týchto n rovníc ako jednu maticovú rovnicu. Uvedieme dva možné spôsoby.

V prvom prípade uvažujme $N \times N$ maticu neznámych $V = (v_{i,j})$ a $N \times N$ maticu pravých strán $F = h^2 f_{ij}$. Keď si uvedomíme, že

$$2v_{i,j} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j} = (T_N \cdot V)_{ij}$$
$$2v_{i,j} - v_{i,j-1} - v_{i,j+1} = (V \cdot T_N)_{ij}$$

sčítaním týchto dvoch rovníc dostaneme

$$(T_N \cdot V + V \cdot T_N)_{ij} = 4v_{i,j} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j} - v_{i,j-1} - v_{i,j+1} = h^2 f_{ij} = (h^2 F_{ij})$$

a teda maticovú rovnicu

$$T_N \cdot V + V \cdot T_N = h^2 F$$

Druhá možnosť je uvažovať $N^2 \times 1$ vektor neznámych v_{ij}. Pri tom treba samozrejme zvoliť poradie neznámych. Pri voľbe "po stĺpcoch"zľava doprava dostaneme systém

$$T_{N\times N} v = h^2 f$$

Pre prípad $N = 3$ je tento systém na obrázku 1. Vo všeobecnosti matica

$$
\begin{aligned}
T_{3\times 3} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_9 \end{bmatrix} &\equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
4 & -1 & & -1 & & & & & \\
-1 & 4 & -1 & & -1 & & & & \\
 & -1 & 4 & & & -1 & & & \\
\hline
-1 & & & 4 & -1 & & -1 & & \\
 & -1 & & -1 & 4 & -1 & & -1 & \\
 & & -1 & & -1 & 4 & & & -1 \\
\hline
 & & & -1 & & & 4 & -1 & \\
 & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 \\
 & & & & & -1 & & -1 & 4
\end{array}\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_9 \end{bmatrix} \\
&= h^2 \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_9 \end{bmatrix} .
\end{aligned} \tag{6.14}
$$

Obr. 1: Systém lineárnych rovníc pre riešenie Poissonovej rovnice v 2D. (J. W. Demmel: Applied numeric linear algebra.)

$T_{N\times N}$ pozostáva z N blokov rozmeru $N \times N$ usporiadaných nasledovne

$$T_{N\times N} = \begin{pmatrix} T_N + 2I_N & -I_N & & \\ -I_N & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I_N \\ & & -I_N & T_N + 2I_N \end{pmatrix}$$

Úloha 1: (3 body) Ukážte, že čísla $\lambda_j = 2(1 - \cos(\frac{j\pi}{N+1}))$ sú vlastné hodnoty matice T_N prislúchajúce vlastným vektorom z_j, ktorých k-ta súradnica je $z_j(k) = \sqrt{\frac{1}{N+1}} \sin(\frac{jk\pi}{N+1})$

Úloha 2: (2 body) Odhadnite najväčšiu a najmenšiu vlastnú hodnotu matice T_N. (Návod: Najväčšia vlastná hodnota λ_N: Pozrite sa na správanie λ_N pre veľké N. Najmenšia vlastná hodnota λ_1: Využite Taylorov polynóm druhého stupňa funkcie $\cos(x)$.)

Úloha 3: (1 bod) Odhadnite hodnotu čísla podmienenosti matice T_N v 2-norme. (Návod: Využite výsledok predchádzajúcej úlohy)

Programovacie úlohy:

Úloha 4:Implementujte Jacobiho metódu pre Poissonovu rovnicu

$$-\frac{d^2v(x)}{dx^2} = x^3, \qquad 0 < x < 1, \qquad v(0) = v(1) = 0.$$

Zobrazte graf riešenia získaného Jacobiho metódou, presné riešenie

$$v(x) = -\frac{x^5}{20} + \frac{1}{20}x$$

a porovnajte ich. Základ programu je v subore 'Jacobi.m'.

Úloha 5: (2 body) Implementujte Gaussovu-Seidlovu metódu a metódu najväčšieho spádu a porovnajte rýchlosť konvergencie jednotlivých metód na predchádzajúcom príklade.

Úloha 6: (2 body) Zobrazte prvé 4 vlastné vektory prislúchajúce matici $T_{N\times N}$ ako plochy. (Na výpočet vlastných vektorov môžete použiť funkciu MATLAB-u)

Úloha 7: (3 body) Vytvorte funkciu, ktorá nájde riešenie 2D Poissonovej rovnice na štvorci použitím Jacobiho metódy. Vstupom funkcie bude číslo N a štvorcová $N \times N$ matica hodnôt f_{ij}. Výstupom bude $N \times N$ matica riešení v_{ij} a reziduum $||T_{N\times N}v - h^2 f||_2/(||T_{N\times N}||_2\, ||v||_2)$ Túto funkciu aplikujte pre rôzne typy problémov, napr.

1. $f_{jk} = \sin(j\pi/(N+1)) \cdot \sin(k\pi/(N+1))$

2. $f_{jk} = \sin(j\pi/(N+1)) \cdot \sin(k\pi/(N+1)) + \sin(3j\pi/(N+1)) \cdot \sin(5k\pi/(N+1))$

3. f_{ij} je nulová okrem niekoľkých dvojíc (i, j) v ktorých má nenulovú hodnotu.

Zobrazte grafy f a riešení v.