

Cvičenie 3

1. Vypočítajte krivosť uvedených kriviek.

(a) $P(t) = (t, t^3)$

(b) $P(t) = (t, t^4)$

(c) $P(t) = (t^2, t^3)$

(d) $P(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$

(e) $P(t) = (t^2 + 1, t^3 + t)$

2. Nájdite vzťah pre krivosť paraboly $P(t) = (at, 2at^2)$, $a > 0$. Ukážte, že vrchol paraboly je jediný bod, v ktorom dosahuje krivosť maximum.

3. Vypočítajte krivosť krivky $P(t) = (2 \cos t + h \cos 2t, 2 \sin t + h \sin 2t)$.

4. Ukážte, že krivosť cykloidy $P(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ v regulárnom bode je

$$k(t) = \frac{1}{4 \sin \frac{t}{2}}.$$

Príklady*:

1. Nech $Q = (a, b)$, $a^2 > b$ a nech A a B sú dva body paraboly $P(t) = (t, t^2)$, ktorými prechádzajú dotyčnice paraboly prechádzajúce bodom Q . Dokážte, že

$$\frac{|QA|^3}{|QB|^3} = \frac{k_A}{k_B},$$

kde k_A je krivosť paraboly v bode A a k_B je krivosť paraboly v bode B .

2. Nech Q je bod elipsy $P(t) = (a \cos t, b \sin t)$ a nech R je priesečník osi x s normálou v k elipse v bode Q . Označme $d = |QR|$. Ukážte, že polomer krivosti r elipsy v bode Q je určený vzorcom $r = cd^3$, kde $c = a^2/b^4$.