

### Cvičenie 1

1. Nájdite všetky hodnoty parametra  $t$ , pre ktoré krivka  $P(t) = (a(1 + \cos t), b \sin t(1 + \cos t))$ ,  $-\infty < t < \infty$  nie je regulárna.
2. Nájdite všetky hodnoty parametra  $t$ , pre ktoré krivka  $P(t) = (\cos^4 t, \sin^4 t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  nie je regulárna. Krivku skúste načrtnúť a vyznačte nájdené body.
3. Nájdite dotyčnice krivky  $P(t) = (t, t^4 - t + 3)$ , ktorá prechádza bodom  $O = (0, 0)$ .
4. Je daná krivka  $P(t) = (t^m, t^{-n})$ ,  $t > 0$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ . Ukážte, že krivka je regulárna. Nech body  $Q_t, R_t$  vzniknú prienikom dotyčnice v bode  $P(t)$  po rade s osami  $x$  a  $y$ . Ukážte, že podiel  $|P(t) - Q_t|/|P(t) - R_t|$  je konštantný a nájdite jeho hodnotu.
5. Ukážte, že všetky normály krivky  $P(t) = (r(\cos t + t \sin t), r(\sin t - t \cos t))$ ,  $-\infty < t < \infty$  majú od stredu súradnicovej sústavy rovnakú vzdialenosť.
6. Ukážte, že dotyčnice k parabole  $P(t) = (at^2, 2at)$ ,  $-\infty < t < \infty$  pre rôzne parametre  $t_1, t_2$  sa pretnú v bode  $(at_1 t_2, a(t_1 + t_2))$ .
7. Nájdite priamky, ktoré sú súčasne dotyčnicami paraboly  $P(s) = (s, s^2)$  a normálami paraboly  $Q(t) = (t, -t^2/2)$
8. Nájdite normály elipsy  $P(t) = (a \cos t, b \sin t)$ , ktoré majú najväčšiu vzdialenosť od stredu súradnicovej sústavy.
9. Nech  $P$  je bod paraboly  $P(t) = (at^2, 2at)$ ,  $a > 0$ . Potom existuje jediná kružnica  $C$  so stredom v ohnisku  $F = (a, 0)$  prechádzajúca bodom  $P$ . Ukážte, že normála paraboly v bode  $P$  prechádza priesečníkom kružnice  $C$  s osou  $x$ . (To umožňuje konštrukciu normály k parabole v danom bode pomocou pravítka a kružidla.)

### Príklady\*

Samopriesek krivky  $P(t)$  je bod krivky taký, že existujú rôzne parametre  $t_1, t_2$ , pre ktoré  $P(t_1) = P(t_2)$  a  $t_2 - t_1$  nie je perióda.

1. Nájdite samoprieseky kriviek
  - (a)  $P(t) = (1 + t^2, t^3)$
  - (b)  $P(t) = (1 + t^2, t(t^2 + 1))$

(c)  $P(t) = (t^2, t^3 + t^4)$

(d)  $P(t) = (t^2, t^5 - t^3)$

2. Iná parametrizácia špeciálneho prípadu krivky traktrix je  $P(t) = (t - \tanh t, 1/\cosh t)$ . Ukážte, že dĺžka úseku ľubovoľnej dotyčnice tejto traktrix od bodu dotyku po priesečník s osou  $x$  nezávisí od parametra  $t$  a je rovný 1. Ukážte, že pre ľubovoľnú kružnicu so stredom na osi  $x$  a polomerom 1 sú dotyčnice ku kružnici a traktrix v spoločnom bode navzájom na seba kolmé.