

## Domáca úloha č. 6

Zverejnená 22.3.2021. Odovzdáva sa elektronicky na [algebrafmfi@gmail.com](mailto:algebrafmfi@gmail.com).

Za úlohu máte odpovedať na otázky:

- Je  $G$  grupa?
- Je  $H$  je podgrupa  $G$ ?
- Je  $H$  je normálna podgrupa  $G$ ?

Svoje tvrdenia zdôvodnite! (Samozrejme v príkladoch, kde je jasné, že ide o grupu – napríklad  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$  alebo podobné číselné množiny – netreba uvádzať žiadne detailné zdôvodnenie, že to je grupa. V niektorých úlohách však nie je na prvý pohľad jasné, či ide o grupu, práve v tých ma zaujíma zdôvodnenie.)

- $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ ,  $H = \mathbb{Z} \times \{0\}$ .
  - $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}; a^2 + b^2 = 1 \right\}$  (s operáciou násobenia matíc),  
 $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}; a^2 + b^2 = 1 \right\}$ .

- $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $H = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ .
  - $G = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A| = \pm 1\}$  (s operáciou násobenia matíc,  $|A|$  označuje determinant matice  $A$ );  $H = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A| = 1\}$ .

- $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ ,  $H = \mathbb{R} \times \{0\}$ .
  - $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}; \varphi \in \mathbb{R} \right\}$  (s operáciou násobenia matíc);  
 $H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \varphi \in \mathbb{R} \right\}$ .

- $G = (\mathbb{R}^3, +)$ ,  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0\}$ .
  - $G = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A| \neq 0\}$  (s operáciou násobenia matíc,  $|A|$  označuje determinant matice  $A$ );  $H = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A| > 0\}$ .

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A-G, 2 riešia H-M, 3 riešia N-R, 4 riešia S-Z